ünster.1930 № 8

Phil. Diss.

Mathematik

Beiträge zur Axiomatik der projektiven Geometrie mit Anwendungen auf die darstellende Geometrie des n-dimensionalen Raumes

---

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde
der Philosophischen und Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster i. W.

vorgelegt von

Benno Hesselbach
aus Leipzig

Universitätsverlag von Robert Noske in Borna-Leipzig
1930

Tag der mündlichen Prüfung: 2. März 1929

Dekan: Herr Prof. Dr. Münscher
Referent: Herr Dr. Prüfer
Korreferent: Herr Prof. Dr. Behnke

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit gibt ein System von Axiomen, aus denen man die projektive Geometrie entwickeln kann. Dabei ist beabsichtigt, die Axiome möglichst anschaulich und evident zu formulieren, so daß der empirische Ursprung der Geometrie zur Geltung kommt (vgl. Pasch, Neuere Geometrie, Vorwort zur 1. u. 2. Aufl. und Jahresber. M.V. 27 S. 228).

Es ist darauf geachtet, daß

1. jede Definition so formuliert ist, daß sie der (von Kronecker aufgestellten) Forderung der Entscheidbarkeit genügt, also kein Begriff durch eine Existenz definiert wird, wenn die Frage nach der Existenz nicht sofort entscheidbar ist;

2. jedes Axiom so formuliert ist, daß es eine graphisch kontrollierbare und anschaulich evidente Tatsache behauptet.

Ein Aufbau der Geometrie ist nach diesen Gesichtspunkten durchgeführt in dem angeführten Buch von Pasch. Dabei wird vom Begriff der Kongruenz Gebrauch gemacht. Dagegen wird in dieser Arbeit der Begriff der Kongruenz vermieden. Als Ersatz muß man die Axiome der Stetigkeit so formulieren, daß sie die eingangs gestellten Forderungen erfüllen.

Aus den Axiomen der Stetigkeit soll folgen, daß die Grenzen von Punktmengen auf Geraden (welche natürlich erst exakt zu definieren sind) dieselben Eigenschaften haben wie die a priori vorhandenen Punkte selbst. Man kann dies z. B. erreichen durch das sog. Axiom von Archimedes, welches man auch ohne Benutzung des Kongruenzbegriffes formulieren kann.

Bei Schur (Grundlagen § 8 S. 163) ist das Axiom folgendermaßen formuliert: „Sind E und P irgend zwei Punkte der Strecke $\overline{OU}$, und man konstruiert der Reihe nach die vierten harmonischen Punkte E_2 von O für E und U, E_3 von E für E_2 und U, E_4 von E_2 für E_3 und U etc., E_n von E_{n-2} für E_{n-1} und U, so gibt es in dieser Reihe stets einen solchen Punkt E_n, daß P auf der Strecke $\overline{OE_n}$ liegt."

„Wir können das Postulat gewissermaßen als eine Abstraktion aus den Erfahrungen des Linearzeichnens ansehen."

Dies Axiom ist aber wenig evident, und es ist logisch wenig primitiv, weil es den Begriff der endlichen Anzahl benutzt. In der

vorliegenden Arbeit ist darauf geachtet, möglichst primitiv zu verfahren, so daß z. B. der Zahlbegriff nicht wesentlich benutzt wird.

Als Stetigkeits-Axiom hat man hier das folgende:

Man habe ein Dreieck B, D, E. Und sei g die Gerade (B, D), h die Gerade (B, E). Die Punkte M, H seien auf der Geraden (E, D) in der Anordnung $[D, E, M, H]$. Die Punkte A der Geraden g werden von dem Punkte H aus auf die Punkte der Geraden h projiziert, dann von dem Punkte M aus auf g nach C zurückprojiziert. Der

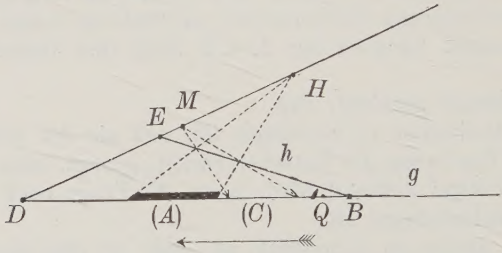

Fig. 1.

Punkt A sei eingeschränkt auf das offene Intervall $\langle B, D\rangle$. Man kann zeigen, daß dann C zwischen A und B liegt und sich monoton mit A ändert. Man kann sagen $C < A$. Axiomatisch ist nun zu fordern, daß daß Intervall $\langle A, C\rangle$ nicht unendlich klein wird, außer in der Nähe von B oder D. Man kann dies so formulieren: Hat man eine Punktmenge (A), welche vom Punkte B durch den Punkt Q abgesperrt ist, so enthält (C) einen Punkt, welcher kleiner ist als alle Punkte der Menge (A).

Dies Axiom ist anschaulich und evident. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie man die projektive Geometrie mit Hilfe dieses Axioms begründen kann. Dabei werden die üblichen Axiome der Verknüpfung und Anordnung benutzt, welche man z. B. durch die Geometrie im Innern eines Tetraeders realisieren kann. Nicht benutzt ist aber das Axiom, daß zwei Ebenen, welche einen Punkt gemeinsam haben, auch eine Gerade gemeinsam haben. So verfährt auch Schur (Grundlagen S. 11 Nr. 3).

Die Arbeit ist so angelegt, daß möglichst schnell der sog. Fundamentalsatz bewiesen wird, daß eine projektive Verwandtschaft auf einer Geraden durch drei Punkte bestimmt ist. Dazu war nötig, ideale Punkte und Geraden zu definieren. Ideale Ebenen werden nicht benutzt, sondern nur der Vollständigkeit wegen am Schluß der Arbeit definiert. Ebenso werden nicht gleich zu Anfang Räume bzw. „der Raum“ definiert, wie dies z. B. bei Schur geschieht (Grundlagen S. 12).

Die durch das hier benutzte Axiomensystem festgelegte Geometrie hat also keine bestimmte Dimensionenzahl.

Im letzten Paragraphen wird von der entwickelten Theorie eine Anwendung auf die darstellende Geometrie des n-dimensionalen Raumes gemacht: Gegeben ist das Zeichenblatt, welches als konvexer Teil einer Ebene vorausgesetzt wird, in welcher die projektive Geometrie gilt; als Zeicheninstrument steht das Linal zur Verfügung. Per definitionem werden die Gegenstandspunkte, -geraden, -ebenen durch Figuren im Zeichenblatt festgelegt und dann gezeigt, daß für sie alle Axiome erfüllt sind, welche in dieser Arbeit benutzt werden.

§ 1.
Punkte, Geraden und Ebenen.

Wir wollen als Elemente der Geometrie zunächst nur die Punkte ansehen und die Geraden und Ebenen durch Prädikate definieren. Dies hat nur formale Bedeutung.

Grundbegriff: Es bedeutet: $\mathfrak{G}(a, b, c)$, daß die 3 Punkte a, b, c auf einer Geraden liegen, $\overline{\mathfrak{G}}(a, b, c)$, daß sie nicht auf einer Geraden liegen.

Axiome: 1. $\mathfrak{G}(\ldots)$ ist ein symmetrisches Prädikat.

2. Es erfüllt die Relation:

$$(a, b).\ \mathfrak{G}(a, a, b)\ ^{1})$$

3. und die Relation:

$$a \neq b\ \&\ \mathfrak{G}(a, b, c)\ \&\ \mathfrak{G}(a, b, d) \rightarrow \mathfrak{G}(a, c, d)\ ^{2})$$

Def.: Es bedeutet: $\mathfrak{G}(a, b, c, d)$, daß für je 3 Punkte (α, β, γ) aus (a, b, c, d) gilt: $\mathfrak{G}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Man hat dann die Relationen:

1. $\mathfrak{G}(a, b, a, b)$
2. $\mathfrak{G}(a, b, c, d) \equiv \mathfrak{G}(c, d, a, b)\ ^{3})$
3. $a \neq b\ \&\ \mathfrak{G}(a, b, c, d)\ \&\ \mathfrak{G}(a, b, e, f) \rightarrow \mathfrak{G}(c, d, e, f)$.

Diese 3 Relationen gestatten es, alle Punktpaare in Klassen einzuteilen, so daß jedes Paar in nur einer Klasse vorkommt. Diese Klassen sind die Geraden, welche so als geometrische Dinge definiert werden können. Aus der Relation

$$\mathfrak{G}(a, b, c, d) \equiv \mathfrak{G}(a, b, d, c)$$

folgt, daß die Paare nicht geordnet zu sein brauchen.

---

[1]) (a) $\mathfrak{G}(\ldots a)$ bedeutet: Für alle a gilt $\mathfrak{G}(\ldots a)$.

[2]) & ist Zeichen für „und". $\rightarrow$ ist das Zeichen der Implikation („wenn ... dann").

[3]) $\equiv$ ist das Zeichen der Äquivalenz („dann und nur dann").

Grundbegriff: Es bedeutet: $\mathfrak{E}(a, b, c, d)$, daß die 4 Punkte a, b, c, d in einer Ebene liegen.

Axiome: 1. $\mathfrak{E}(\ldots)$ ist ein symmetrisches Prädikat.

2. Es erfüllt die Relation:

$$\mathfrak{G}(a, b, c) \rightarrow (d)\ \mathfrak{E}(a, b, c, d)$$

3. und die Relation:

$$\overline{\mathfrak{G}}(a, b, c)\ \&\ \mathfrak{E}(a, b, c, d)\ \&\ \mathfrak{E}(a, b, c, e) \rightarrow \mathfrak{E}(a, b, d, e)$$

Mit Hilfe dieser Relationen kann man wieder die Ebene als geometrisches Ding, nämlich als Klasse von Dreiecken, definieren.

Man kann jetzt leicht folgende Sätze herleiten:

Sätze: 1. Wenn zwei nicht zusammenfallende Ebenen mehr als zwei Punkte gemeinsam haben, so schneiden sie sich in einer Geraden.

2. Wenn eine Ebene zwei verschiedene Punkte einer Geraden enthält, so enthält sie diese Gerade ganz.

3. Wenn sich zwei Gerade schneiden, so liegen sie in einer Ebene.

4. Wenn drei nicht zusammenfallende Ebenen sich in drei Geraden schneiden, und zwei dieser Geraden laufen durch einen Punkt, so läuft auch die dritte Gerade durch diesen Punkt.

§ 2.

Die Anordnung der Punkte auf einer Geraden.

Grundbegriff: Es bedeutet: $[A, B, C]$, daß der Punkt B auf der Geraden (A, C) liegt, und zwar zwischen A und C. Also B liegt im Intervall $\langle A, C\rangle$.

Es bedeutet $\langle A, C\rangle$ das offene, $[A, C]$ das abgeschlossene Intervall (Strecke).

Axiome: Das Prädikat $[\ldots]$ erfüllt die Relationen:

1. $[A, B, C] \rightarrow \mathfrak{G}(A, B, C)$
2. $[A, B, C] \equiv [C, B, A]$
3. $\overline{[A, B, C]} \vee \overline{[B, C, A]}$ [1])
4. $(A, B).\ \overline{[A, B, A]}$
5. $\mathfrak{G}(A, B, C)\ \&\ A \neq B\ \&\ A \neq C\ \&\ B \neq C \rightarrow$
   $[A, B, C] \vee [B, A, C] \vee [A, C, B]$.
6. (Axiom von Pasch). Hat man $\overline{\mathfrak{G}}(A, B, C)$, $[A, D, B]$ und in

[1]) $\vee$ ist das Zeichen für (nicht ausschließendes) „oder". Durch Überstreichen wird allgemein die Verneinung bezeichnet.

der Ebene (A, B, C) eine Gerade d durch D, so trifft d die Strecke $[A, C]$ oder die Strecke $[B, C]$.

Man kann jetzt folgende Sätze herleiten:

Sätze: 1. Es ist (A, B). $\overline{[A, A, B]}$

2. $\left.\begin{matrix}[A, B, D] \\ [B, C\ D]\end{matrix}\right\} \rightarrow [A, C, D] \,\&\, [A, B, C]$ [1])

3. $\left.\begin{matrix}[A, B, C] \\ [B, C, D]\end{matrix}\right\} \rightarrow [A, C, D]$

4. Eine Gerade, welche zwei Seiten eines Dreiecks zwischen den Ecken trifft, trifft nicht die dritte Seite zwischen den Ecken.

Man braucht noch die folgenden Existenz-Axiome:

Axiome: 1. Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene liegende Punkte.

2. Auf einer Geraden gibt es zu beiden Seiten jeder Strecke Punkte.

§ 3.
Der ideale Punkt.

Satz 1: Man habe 4 Geraden: l, m, λ, μ. Und die folgenden Ebenen: $\mathfrak{E}(m, \lambda)$; $\mathfrak{E}(m, l)$; $\mathfrak{E}(l, \lambda)$; $\mathfrak{E}(m, \mu)$; $\mathfrak{E}(l, \mu)$. Dagegen sei $\overline{\mathfrak{E}}(m, l, \lambda)$ und $\overline{\mathfrak{E}}(m, l, \mu)$. Dann ist auch $\mathfrak{E}(\lambda, \mu)$.

Der Beweis dieses Satzes von Pasch [2]) sei der Vollständigkeit wegen hier angegeben.

Man zeichne auf l die beiden Punkte A, B, so daß m und λ nicht $[A, B]$ treffen. Weiter zeichne man (was möglich ist) die Punkte D, E, C, D', E', F', so daß D und E auf m, D' und E' auf λ, $C = ((A, D)(B, E))$, $F' = ((A\,E')(B\,D'))$, und $[A, D, C]$, $[B, E, C]$, $[A, E', F']$, $[B, D', F']$. Dann hat man die Punkte: $((A, E)(B, D)) = F$, $((A, D')(B, E')) = C'$, und die Geraden: $c = (C, C')$, $d = (D, D')$, $e = (E, E')$, $f = (F, F')$, und die Ebenen: (c, d), (c, e), (e, f), (d, f), (d, e). Weiter hat man nach dem Axiom von Pasch die Punkte: (c, d), (c, e), (e, f), (d, f). Nun ist $\overline{\mathfrak{E}}(c, d, e)$ wegen $\overline{\mathfrak{E}}(m, l, \lambda)$. Ebenso $\overline{\mathfrak{E}}(e, d, f)$. Also nach Satz 4 von § 1 laufen c, d, e, f durch einen Punkt, nämlich e läuft durch (c, d), also existiert (e, d), f läuft durch (e, d). Also ist $\mathfrak{E}(c, f)$. Man hat ferner die Punkte $((C, F), l)$ und $((C', F'), l)$ in $\langle A, B\rangle$, was durch mehrfache Anwendung des Axioms von Pasch und der Verknüpfungs-Axiome folgt, ferner die Ebenen: $((C, F), l)$;

---

[1]) Für die Beweise der anschaulichen Relationen 2, 3 vgl. Feigl, Jahresber. M.V. 33 S. 2.

[2]) Siehe Pasch, Neuere Geometrie § 5.

$((C', F')\, l)$; $((C, F)\, (C', F'))$. Also laufen $l, (C, F), (C', F')$ durch einen Punkt in $\langle A, B\rangle$. Man konstruiere nun C'', D'', E'', F'' in der Ebene (l, μ) ebenso wie C, D, E, F in der Ebene (l, m). Dann laufen $l, (C, F), (C', F'), (C'', F'')$ durch einen Punkt. Sei weiter: $c' = (C'\, C'')$, $d' = (D', D'')$, $e' = (E'\, E'')$, $f' = (F'\, F'')$. Man hat dann die Punkte: (c', d'), $(c'\, e')$, (e', f'), (d', f'), (c', f'). Und es ist $\overline{\mathfrak{E}}\,(c', e'. f')$, $\overline{\mathfrak{E}}\,(c', d', f')$. Also laufen c', d', e', f' durch einen Punkt, also ist $\mathfrak{E}\,(e', d')$, also $\mathfrak{E}\,(\lambda, \mu)$.

Satz 2: Man habe zwei Geraden a, b; und $\mathfrak{E}\,(a, b)$; durch a laufe eine Ebene α, durch b eine Ebene β; D sei ein gemeinsamer Punkt von α und β und sei $\overline{\mathfrak{E}}\,(a, b, D)$. Dann haben α und β eine Gerade gemeinsam.

Beweis: Seien A_1 und A_2 auf a, so daß b nicht $[A_1, A_2]$ trifft; ebenso B_1 und B_2 auf b, so daß a nicht $[B_1, B_2]$ trifft; ferner sollen sich die Strecken $\langle A_1, B_1\rangle$ und $\langle A_2, B_2\rangle$ in J treffen. (Dies ist leicht

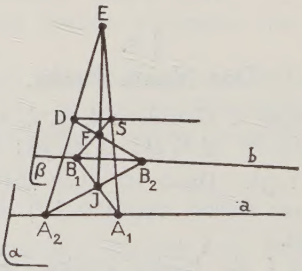

Fig. 2.

zu erreichen.) E sei auf (A_2, D), so daß $[A_2, D, E]$. Dann trifft (E, J) $\langle D, B_2\rangle$ in F, (B_1, F) trifft $\langle A_1, E\rangle$ in S (wegen $[E, F, J]$). Dann ist $S \neq D$ und $\mathfrak{E}\,(a, D, S)$, $\mathfrak{E}\,(b, D, S)$.

Def. 1: Es soll bedeuten: $\mathfrak{P}\,(a, b, c)$, daß für die Geraden a, b, c gilt. Entweder:

$$\overline{\mathfrak{E}}\,(a, b, c)\ \&\ \mathfrak{E}\,(a, b)\ \&\ \mathfrak{E}\,(a, c)\ \&\ \mathfrak{E}\,(b, c);$$

Oder: $\mathfrak{E}\,(a, b, c)$, und es gibt eine Gerade d, so daß:

$$\overline{\mathfrak{E}}\,(a, b, d)\ \&\ \mathfrak{E}\,(a, d)\ \&\ \mathfrak{E}\,(b, d)\ \&\ \mathfrak{E}\,(c, d).$$

Die Frage im zweiten Falle, ob es eine derartige Gerade d gibt, ist stets entscheidbar. Nämlich man zeichne durch a die Ebene $\alpha \neq (a, b)$, auf α den Punkt D (nicht auf a), und zeichne die Ebene $(b, D) = \beta$. Dann ist $(\alpha, \beta) = d_1$. Wenn dann $\overline{\mathfrak{E}}\,(c, d_1)$, so gibt es auch kein anderes d_2 mit $\mathfrak{E}\,(a, d_2)$, $\mathfrak{E}\,(b, d_2)$, $\mathfrak{E}\,(c, d_2)$, denn sonst hat man $\mathfrak{E}\,(d_1, d_2)$, $\mathfrak{E}\,(c, d_1)$.

Satz 3: $\mathfrak{P}(\cdots)$ ist ein symmetrisches Prädikat, und es ist transitiv, d. h.:

$$a \neq b \;\&\; \mathfrak{P}(a, b, c) \;\&\; \mathfrak{P}(a, b, d) \longrightarrow \mathfrak{P}(a, c, d)$$

(Die sechs möglichen Fälle beim Beweise sind in den Figg. 3 dargestellt. Die Geraden sind durch Punkte symbolisiert.)

Durch das Prädikat $\mathfrak{P}$ kann man also den idealen Punkt definieren, analog wie im § 1 die Gerade definiert ist. Für reale Punkte ist die Definition nichts Neues.

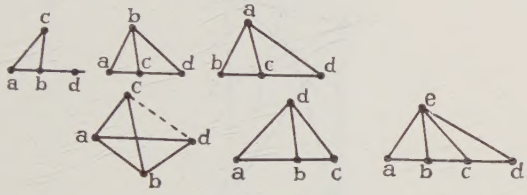

Fig. 3.

Wenn die beiden (komplanaren) Geraden a, b den Punkt P bestimmen, so laufen a und b durch P.

P liegt auf a, wenn a durch P läuft.

Def. 2: Ein Punkt liegt in einer Ebene, wenn er auf einer Geraden dieser Ebene liegt.

Eine solche Gerade kann man immer finden. Nämlich man verbinde den Punkt mit einem beliebigen Punkte der Ebene. Dies ist möglich nach Satz 2. Liegt die Verbindung nicht in der Ebene, so gibt es auch keine andere Gerade. Dies folgt aus Satz 1.

Satz 4: Man habe zwei Ebenen α, β. g sei eine gemeinsame Gerade, P ein gemeinsamer (realer oder idealer) Punkt der beiden Ebenen. Dann liegt P auf g. Beweis: Ziehe in α die Gerade $a \neq g$, in β die Gerade $b \neq g$, so daß a und b durch P laufen. Dann ist: $\mathfrak{E}(a, b)$, $\mathfrak{E}(a, g)$, $\mathfrak{E}(b, g)$, $\overline{\mathfrak{E}}(a, b, g)$, also $\mathfrak{P}(a, b, g)$.

§ 4.
Die ideale Gerade.

Satz 1: Man habe in einer Ebene die beiden Geraden g und g_1. Auf g liege der Punkt a, auf g_1 der Punkt a_1. β sei ein Punkt im Intervall $\langle a, a_1 \rangle$. Dann gibt es durch β eine Gerade, welche g und

g_1 trifft und von (α, α_1) verschieden ist. Beweis: Man bestimme den Punkt γ beliebig auf g_1 und ziehe die Gerade (γ, β). Wenn dann (γ, β) g trifft, so ist nichts zu beweisen. Sonst bestimme man die Punkte η, η' auf g, so daß $[\eta, \alpha, \eta']$. Dann trifft (γ, β) nach dem Axiom von Pasch $\langle \alpha_1, \eta \rangle$ in δ. Ebenso trifft (γ, β) $\langle \alpha_1, \eta' \rangle$ in δ'. Und (α, α_1) trifft $\langle \delta, \eta' \rangle$ in ε. Und es ist $[\delta, \beta, \delta']$. Daraus folgt $[\gamma, \beta, \delta] \vee [\gamma, \beta, \delta']$; man kann annehmen $[\gamma, \beta, \delta]$; denn man kann δ mit δ',

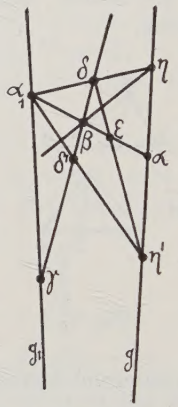

Fig. 4.

η mit η' vertauschen. Dann trifft (η, β) $\langle \alpha_1, \gamma \rangle$, also (η, β) ist eine geforderte Gerade. Aus der Konstruktion folgt, daß es noch mehr solcher Geraden gibt.

Def. 1: Man habe drei (reale oder ideale) Punkte P_1, P_2, P_3. Wenn für vier reale Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, welche nicht in einer Ebene liegen, gilt:

$$\mathfrak{E}((P_1, \alpha_1)(P_2, \alpha_1)(P_3, \alpha_1)), \quad \mathfrak{E}((P_1, \alpha_2)(P_2, \alpha_2)(P_3, \alpha_2)),$$
$$\mathfrak{E}((P_1, \alpha_3)(P_2, \alpha_3)(P_3, \alpha_3)), \quad \mathfrak{E}((P_1, \alpha_4)(P_2, \alpha_4)(P_3, \alpha_4)),$$

so gelte $\mathfrak{G}(P_1, P_2, P_3)$. Andernfalls sei $\overline{\mathfrak{G}}(P_1, P_2, P_3)$.

Diese Definition ist nichts Neues, wenn P_1, P_2, P_3 auf einer realen Geraden liegen.

Satz 2: Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des Quadrupels $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Beweis:

Fall 1: P_1 ist real. Dann ist $(P_1, P_2) = (P_1, P_3)$. Nämlich andernfalls ist eines der α, etwa α_1 nicht in der Ebene $((P_1, P_2)(P_1, P_3))$, und $(\alpha_1, P_1) \neq (\alpha_1, P_2)$, $(\alpha_1, P_1) \neq (\alpha_1, P_3)$. Man hat dann die beiden verschiedenen Ebenen $((P_1, P_2)(P_1, P_3))$ und $((\alpha_1, P_1)(\alpha_1, P_2)(\alpha_1, P_3))$. (P_1, P_2) liegt in der ersten Ebene und wegen $\mathfrak{E}((P_1, P_2)(\alpha_1, P_2))$ auch

in der zweiten. Ebenso liegt auch (P_1, P_3) in beiden Ebenen. Daraus folgt $(P_1, P_2) = (P_1, P_3)$. Hat man einen weiteren realen Punkt α_5, so liegt (α_5, P_2) in der Ebene $(\alpha_5, (P_1, P_2))$, und (α_5, P_3) in der Ebene $(\alpha_5, (P_1, P_3))$. Also wegen $(\alpha_5 (P_1, P_2)) = (\alpha_5 (P_1, P_3))$ hat man $\mathfrak{E}((\alpha_5, P_1)(\alpha_5, P_2)(\alpha_5, P_3))$. Dies gilt für alle Punkte eines neuen Quadrupels.

Fall 2: P_1 und P_2 sind nicht real. Man kann annehmen $\overline{\mathfrak{E}}(\alpha_1, \alpha_2, P_1, P_2)$. Nämlich ist $(\alpha_1, P_1) = (\alpha_1, P_2) \,\&\, (\alpha_2, P_1) = (\alpha_2 P_2)$, so

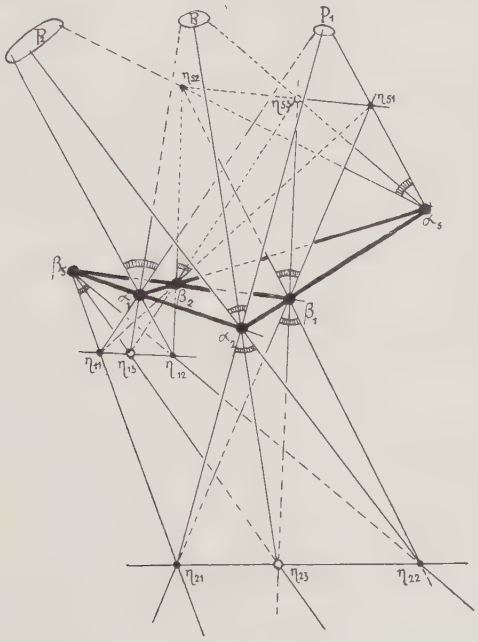

Fig. 5.

ist $P_1 = P_2$ und nichts zu beweisen. Man kann also annehmen $\overline{\mathfrak{G}}(\alpha_1, P_1, P_2)$. Dann hat man die Ebene (α_1, P_1, P_2). Eines der α, man kann annehmen α_2, liegt außerhalb dieser Ebene. Und dann ist $\overline{\mathfrak{E}}(\alpha_1, \alpha_2, P_1, P_2)$. Für einen weiteren realen Punkt α_5 sei zunächst angenommen: $\overline{\mathfrak{E}}(\alpha_1, \alpha_2, P_1, \alpha_5)$, $\overline{\mathfrak{E}}(\alpha_1, \alpha_2, P_2, \alpha_5)$, $\overline{\mathfrak{E}}(\alpha_1, \alpha_2, P_3, \alpha_5)$. Man bestimme dann β_1 auf $\langle \alpha_2, \alpha_5 \rangle$ und β_5 auf (α_1, α_2), so daß $[\alpha_2, \alpha_1, \beta_5]$. Dann trifft (β_1, β_5) $\langle \alpha_1, \alpha_5 \rangle$ in β_2. Durch β_1 ziehe man eine Gerade, welche von (α_2, α_5) verschieden ist und welche (α_5, P_ν) und (α_2, P_ν)

trifft in resp. $\eta_{5\nu}$ und $\eta_{2\nu}$. Dies für $\nu = 1,2$. Dies ist möglich nach Satz 1. Ferner sei $\overline{\mathfrak{E}}(\beta_1, \beta_2, \eta_{51}, \eta_{52})$. Dies kann man so einrichten, es ist nämlich $\overline{\mathfrak{E}}(\beta_1, \beta_2, \alpha_5, P_1, P_2)$ wegen $\overline{\mathfrak{E}}(\alpha_1, \alpha_2, P_1, \alpha_5)$. Dann trifft $(\alpha_1, P_\nu)\langle \alpha_2, \eta_{2\nu}\rangle$ oder $\langle \beta_5, \eta_{2\nu}\rangle$, und weil $((\alpha_1, P_\nu)(\alpha_2, \eta_{2\nu})) = P_\nu$ nicht real ist, so trifft $(\alpha_1, P_\nu)\langle \beta_5, \eta_{2\nu}\rangle$ in $\eta_{1\nu}$. Dann hat man die drei Ebenen: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5)$, $(\alpha_1, \alpha_5, P_\nu)$, $(\beta_5, \eta_{2\nu}, \eta_{5\nu})$ mit den Schnittgeraden: (α_1, α_5), $(\beta_1, \beta_2, \beta_5)$, $(\eta_{1\nu}, \eta_{5\nu})$. Also $(\eta_{1\nu}, \eta_{5\nu})$ geht durch β_2. Es ist $\overline{\mathfrak{G}}(\eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{21}, \eta_{22})$ wegen $\overline{\mathfrak{E}}(\alpha_1, \alpha_2, P_1, P_2)$. Wegen $\mathfrak{E}(\alpha_1, P_1, P_2, P_3)$ und $\mathfrak{E}(\alpha_2, P_1, P_2, P_3)$ hat man die beiden (realen oder idealen) Punkte $\eta_{\nu 3} = ((\eta_{\nu 1}, \eta_{\nu 2})(\alpha_\nu, P_3))$, $(\nu = 1,2)$, und diese liegen auf der Geraden $((\eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{21}, \eta_{22})(\alpha_1, \alpha_2, P_3))$, also auf einer Geraden mit β_5. Also ist $\mathfrak{E}(\beta_1, \beta_2, \eta_{13}, \eta_{23})$. Es ist $\overline{\mathfrak{G}}(\beta_1, \beta_2, \eta_{13})$ wegen $\overline{\mathfrak{E}}(P_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_5)$. Man hat also den (realen oder idealen) Punkt $\eta_{53} = ((\beta_1, \eta_{23})(\beta_2, \eta_{13}))$. Man hat die zwei Ebenen $(\alpha_1, \eta_{13}, P_3, \alpha_5, \eta_{53})$ und $(\alpha_2, \eta_{23}, P_3, \alpha_5, \eta_{53})$, also $\mathfrak{G}(\alpha_5, \eta_{53}, P_3)$. Ferner hat man die beiden Ebenen $(\eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{51}, \eta_{52}, \eta_{13}, \eta_{53})$ und $(\eta_{21}, \eta_{22}, \eta_{51}, \eta_{52}, \eta_{23}, \eta_{53})$, also $\mathfrak{G}(\eta_{51}, \eta_{52}, \eta_{53})$. Also $\mathfrak{E}(\alpha_5, P_1 P_2 P_3)$, q. e. d. Wenn die Voraussetzung bei diesem Beweise $\overline{\mathfrak{E}}(\alpha_1, \alpha_2, P_\nu, \alpha_5)$ $(\nu = 1, 2, 3)$ nicht erfüllt ist, so konstruiere man α_2', so daß $\mathfrak{E}(\alpha_1, \alpha_2', P_1, P_2)$, $\overline{\mathfrak{E}}(\alpha_1, \alpha_2, P_\nu, \alpha_2')$. $\overline{\mathfrak{E}}(\alpha_1, \alpha_2', P_\nu, \alpha_5)$, $(\nu = 1,2,3)$. Also α_2' muß 7 Ebenen vermeiden. Dann führe man den Beweis wie eben mit α_2' an Stelle von α_5, dann noch einmal mit α_2' an Stelle von α_2.

Das in Def. 1 definierte Prädikat $\mathfrak{G}(\ldots)$ der idealen Geraden erfüllt dieselben Relationen wie das Prädikat $\mathfrak{G}(\ldots)$ der realen Geraden (Axiome in § 1). Nämlich die Relationen 1, 2 sind klar, 3 folgt aus

$$P_1 \neq P_2 \;\&\; (\alpha_1, P_1) = (\alpha_1, P_2) \;\&\; (\alpha_2, P_1) = (\alpha_2, P_2) \;\&\; (\alpha_3, P_1) = (\alpha_3, P_2) \longrightarrow \mathfrak{G}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ real})$$

in Verbindung mit Satz 2.

Man kann also die ideale Gerade genau so definieren wie die reale Gerade in § 1.

Def. 2: Eine ideale Gerade liegt in einer Ebene, wenn zwei ihrer Punkte in dieser Ebene liegen.

Man kann jetzt folgende Sätze beweisen:

Satz 3: Durch einen realen Punkt und eine ideale Gerade kann man genau eine Ebene legen.

Satz 4: Durch drei (reale oder ideale) Punkte, welche nicht auf einer Geraden liegen, läuft höchstens eine Ebene. Beweis: Gäbe es zwei Ebenen durch die drei Punkte, so gäbe es in den zwei Ebenen

ein nicht-ebenes Tetraeder, dessen jede Ecke mit den drei Punkten in einer Ebene liegt.

Satz 5: Enthält eine Ebene zwei (reale oder ideale) Punkte einer (realen oder idealen) Geraden, so enthält sie alle Punkte dieser Geraden. Beweis: Def. 1 und Satz 2.

Satz 6: Es gibt keine (ideale) Gerade, welche nur einen realen Punkt enthält. Beweis: Folgt aus Satz 2 von § 3.

Satz 7: Hat man in einer Ebene die reale Gerade b und die ideale Gerade a, so gibt es einen idealen Schnittpunkt (a, b). Beweis: Seien A_1, A_2 Punkte auf a, B_1 und B_2 reale Punkte auf b; $C_2 = ((A_1, B_1)(A_2, B_2))$; C_1 ein realer Punkt außerhalb der Ebene (a, b); D ein realer Punkt auf (A_2, C_1). Nach Satz 2 von § 3 schneiden sich die beiden Ebenen (C_1, A_1, C_2) und (B_1, B_2, D) in einer Geraden. Nämlich sie enthalten die resp. Geraden (C_1, C_2) und (B_2, D), welche in einer Ebene liegen, und sie haben den Punkt B_1 gemeinsam, welcher nicht in dieser Ebene liegt. Die Schnittgerade $((C_1, A_1, C_2)(B_1, B_2, D))$ trifft (C_1, A_1) in E. (D, E) läuft durch den Punkt (a, b). Nämlich A_1, A_2, $((B_1, B_2)(E, D))$ liegen auf einer Geraden. Das folgt z. B. aus Satz 4.

Satz 8: Hat man in einer Ebene die beiden idealen Geraden a, b, so hat man den idealen Schnittpunkt (a, b). Beweis: Man zeichne in der Ebene (a, b) die reale Gerade g. Nach Satz 7 hat man die Schnittpunkte: $(g, a) = G$, $(g, b) = H$. Man zeichne den realen Punkt A außerhalb der Ebene (a, b), den realen Punkt B auf (A, G), den realen

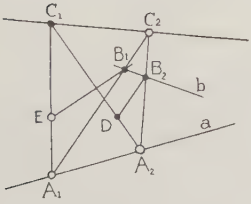

Fig. 6.

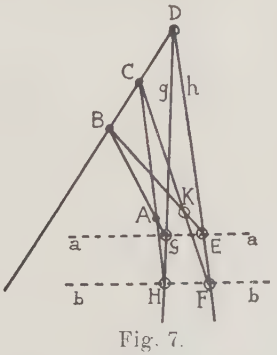

Fig. 7.

Punkt C auf (A, H). Dann hat man die Ebene (g, B, C), also treffen sich $g, (B, C)$. Durch den Schnitt D ziehe eine reale Gerade h in der Ebene (a, b). Man hat die Punkte: $E = (h, a)$, $F = (h, b)$, und die Ebene (B, C, D, E, F). Also treffen sich (B, E), (C, F) in K. Man hat dann die

Punkte $((A, K), a)$ und $((A, K), b)$. Die Ebene (a, b) enthält diese beiden Punkte. Weil sie aber (A, K) nicht ganz enthält, so ist $((A, K), a) = ((A, K), b)$.

§ 5.

Eigenschaften der Perspektive.

Def. 1: Hat man auf einer Geraden die 4 Punkte A, B, C, D, und A, B sind real, so bedeutet: $ABfCD$, daß entweder: C, D real und $[A, C, B]$ & $[A, D, B]$, oder: $\overline{[A, C, B]}$ & $\overline{[A, D, B]}$.

Def. 2: Hat man in einer Ebene die vier Geraden a, b, c, d, welche durch den realen Punkt Z laufen, und eine Gerade g, welche a, b, c, d in resp. A, B, C, D schneidet, so daß A, B real sind, und $ABfCD$, so sei $abfcd$.

Satz 1: Diese Definition ist unabhängig von g. Beweis: Man habe zwei Geraden g_1 und g_2. Seien $A_\nu, B_\nu, C_\nu, D_\nu$ resp. auf a, b, c, d und g_ν. $(\nu = 1, 2)$. Man hat dann 3 Fälle:

1. Z liegt auf $\langle A_1, A_2\rangle$ und $\langle B_1, B_2\rangle$. Hat man dann einen Punkt C_1 im Intervall $\langle A_1, B_1\rangle$, so trifft (C_1, Z) nicht $[A_1, B_2]$, also trifft sie $\langle A_2, B_2\rangle$.
2. Z liegt weder auf $\langle A_1, A_2\rangle$ noch auf $\langle B_1, B_2\rangle$. Dann trifft $(C_1, Z)\langle A_1, B_2\rangle$, also auch $\langle A_2, B_2\rangle$.
3. Z liegt auf $\langle B_1, B_2\rangle$, aber nicht auf $\langle A_1, A_2\rangle$. Dann trifft (C_1, Z) nicht $[A_1, B_2]$, also auch nicht $[A_2, B_2]$. Umgekehrt, wenn (C_1, Z) nicht $[A_2, B_2]$ trifft, so ist C_1 in $\langle A_1, B_1\rangle$.

Also in allen Fällen hat man: Wenn ein Punkt des Intervalles $\langle A_1, B_1\rangle$ auf das Innere des Intervalles $\langle A_2, B_2\rangle$ abgebildet wird, so wird jeder Punkt des Intervalles ebenso abgebildet. Dasselbe gilt für die Punkte außerhalb des Intervalles.

Satz 2: Es ist: $abfcd \equiv bafcd$.

Satz 3: Es ist $abfcd \equiv cdfab$. Beweis: Sei $abfcd$. Man zeichne A auf a, B auf b, so daß $\langle A, B\rangle$ von c getroffen wird (dies ist leicht zu erreichen). Dann wird $\langle A, B\rangle$ auch von d getroffen. Dann ist $\overline{[C, A, D]}$, denn aus $[B, C, A]$ & $[C, A, D]$ folgt $[B, A, D]$, was falsch ist. Ebenso ist $\overline{[C, B, D]}$. Also $cdfab$.

Def. 3: Hat man in einer Ebene die vier Geraden a, b, c, d durch den realen Punkt Z, und ist nicht $abfcd$, so sei $abfcd$. (Das Paar (a, b) trennt das Paar (c, d).)

Satz 4: Man habe durch eine reale Gerade z die vier Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Diese seien von den zwei Ebenen ε_1 und ε_2 in den beiden

Strahlenbüscheln resp. (a_1, b_1, c_1, d_1) und (a_2, b_2, c_2, d_2) mit den zwei realen Scheiteln Z_1, Z_2 geschnitten. Und sei $a_1 d_1 f b_1 c_1$. Dann hat man $a_2 d_2 f c_2 b_2$. Beweis: Wenn $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sich in einer realen Geraden schneiden, ist man fertig. Andernfalls bestimme man die realen Punkte A_1, D_1, resp. auf a_1, d_1, so daß b_1 und c_1 von $\langle A_1, D_1 \rangle$ getroffen werden, ferner auf z einen realen Punkt Z_3, so daß $[Z_1, Z_2, Z_3]$. Dann hat man die realen Punkte $A_2 = (a_2 (Z_3, A_1))$, $D_2 = (d_2 (Z_3, D_1))$; und $[A_1, A_2, Z_3]$, $[D_1, D_3, Z_3]$. Also nach Satz 1 (Fall 2) hat man die Punkte $B_2 = ((Z_3, B_1)(A_2, D_2))$ und $C_2 = ((Z_3, C_1)(A_2, D_2))$, durch welche auch die resp. Geraden b_2, c_2 laufen. Und es ist $A_2 D_2 f B_2 C_2$. Der Satz gilt auch, wenn $Z_1 = Z_2$. Beweis durch zweimalige Anwendung von Satz 4.

Def. 4: Man habe die 4 (realen oder idealen) Punkte A, B, C, D, so daß $\mathfrak{G}(A, B, C, D)$. Ferner den realen Punkt Z und die Geraden $a = (Z, A)$, $b = (Z, B)$, $c = (Z, C)$, $d = (Z, D)$. Und sei $a b f c d$. Dann gelte $A B f C D$.

Satz 5: Diese Definition ist unabhängig von Z. Beweis: Satz 4.

Def. 5: In einer Ebene habe man die 4 (realen oder idealen) Geraden a, b, c, d durch den Punkt Z. Und auf ihnen die Punkte resp. A, B, C, D, so daß diese auf einer Geraden g liegen. Und sei $A B f C D$. Dann gelte $a b f c d$.

Satz 6: Diese Definition ist unabhängig von g. Beweis: Satz 5 und Satz 4 (Fall $Z_1 = Z_2$).

Satz 7: Man habe eine Gerade g und einen Punkt P, so daß P nicht auf g. Durch P habe man die Geraden a, b, c, d, und sei $(g, a) = A$, $(g, b) = B$, $(g, c) = C$, $(g, d) = D$. Dann ist $a b f c d \equiv A B f C D$. Beweis: Def. 5 und Satz 6.

Satz 8: Man habe in einer Ebene ε die Punkte $Z, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$, so daß die 3 Geraden (α_1, α_2), (β_1, β_2), (γ_1, γ_2) durch Z laufen. Dann liegen die 3 Punkte $A = ((\beta_1, \gamma_1)(\beta_2, \gamma_2))$, $B = ((\alpha_1, \gamma_1)(\alpha_2, \gamma_2))$, $C = ((\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2))$ auf einer Geraden (Satz von Desargues). Beweis: Zunächst sei angenommen, daß die 4 Punkte $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ real sind[1]). Man zeichne die reale Gerade h durch Z außerhalb ε und den realen Punkt M in der Ebene $(h, (\gamma_1, \gamma_2))$, nicht auf ε oder h. Sei $\Gamma_1 = (h(M, \gamma_1))$, $\Gamma_2 = (h(M, \gamma_2))$. Nach Satz 5 von § 4 hat man den Punkt $\widetilde{A} = ((\beta_1, \Gamma_1)(\beta_2, \Gamma_2))$, und nach den Sätzen 3, 5, 8 von § 4 den Punkt $\widetilde{B} = ((\alpha_1, \Gamma_1)(\alpha_2, \Gamma_2))$. Weil h nicht in ε liegt, hat man die beiden Ebenen $(\alpha_1, \beta_1, \Gamma_1)$ und $(\alpha_2, \beta_2, \Gamma_2)$, und als deren Schnitt $\mathfrak{G}(\widetilde{A}, \widetilde{B}, C)$; ebenso $\mathfrak{G}(M, A, \widetilde{A})$ als

[1]) Hier folgt der übliche Beweis des Satzes von Desargues. Man hat nur zu beachten, daß man nur vier reale Punkte hat.

Schnitt der beiden Ebenen $(\beta_1, \gamma_1, \Gamma_1)$ und $(\beta_2, \gamma_2, \Gamma_2)$; und $\mathfrak{G}(M, B, \widetilde{B})$ als Schnitt der beiden Ebenen $(\alpha_1, \gamma_1, \Gamma_1)$ und $(\alpha_2, \gamma_2, \Gamma_2)$. Man hat also $\mathfrak{E}(A, B, C, M)$. Wäre nun $\overline{\mathfrak{G}}(A, B, C)$, so hätte man die zwei Ebenen (M, A, B, C) und $(Z, A, B, C) = \varepsilon$. Also doch $\mathfrak{G}(A, B, C)$.

Wenn $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ nicht real sind, bestimme man einen realen Punkt S außerhalb der Ebene ε, ziehe $(S, \beta_1) = b_1$, $(S, \beta_2) = b_2$, $(S, \gamma_1) = c_1$, $(S, \gamma_2) = c_2$, bestimme die Punkte β_1', β_2', γ_1' auf resp. b_1, b_2, c_1 und β_1'', β_2'' auf resp. b_1, b_2, so daß $[\beta_1', S, \beta_1'']$, $[\beta_2', S, \beta_2'']$. Die beiden Ebenen (b_1, c_2) und (b_2, c_1) treffen sich in den beiden Punkten S und $((\beta_1, \gamma_2)(\beta_2, \gamma_1))$, also in einer Geraden. Diese Gerade trifft $[\beta_2', \gamma_1']$ oder $[\beta_2'', \gamma_1']$, man kann annehmen, sie trifft $[\beta_2', \gamma_1']$ in V. Die Gerade c_2 trifft dann $[\beta_1', V]$ oder $[\beta_1'', V]$, man kann an-

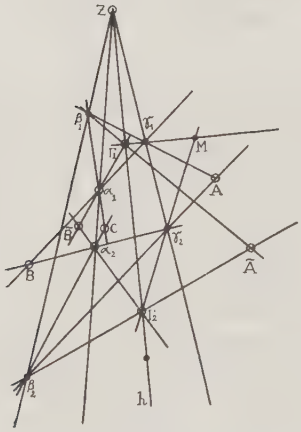

Fig. 8.

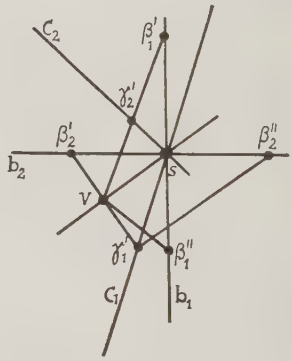

Fig. 9.

nehmen $[\beta_1' V]$. Also trifft c_2 die Ebene $(\beta_1', \beta_2', \gamma_1') = \varepsilon'$ in γ_2'. Setzt man: $((S, \alpha_1)\varepsilon') = \alpha_1'$, $((S, \alpha_2)\varepsilon') = \alpha_2'$, $((S, Z)\varepsilon') = Z'$, $((S, A)\varepsilon') = A'$, $((S, B)\varepsilon') = B'$, $((S, C)\varepsilon') = c'$, so laufen (α_1', α_2'), (β_1', β_2'), (γ_1', γ_2') durch Z' und man kann beweisen $\mathfrak{G}(A', B', C')$. Daraus folgt $\mathfrak{G}(A, B, C)$.

Also ist der Satz von Desargues für beliebige (reale oder ideale) Punkte bewiesen. Man kann also auch seine Umkehrung beweisen.

Satz 9 (Vierseit-Satz): Man habe zwei ebene Vierseits in realen Ebenen mit den Seiten $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ und $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$. Und man habe die 5 Geraden: $((\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2))$, $((\alpha_1, \gamma_1)(\alpha_2, \gamma_2))$, $((\alpha_1, \delta_1)(\alpha_2, \delta_2))$, $((\beta_1, \gamma_1)(\beta_2, \gamma_2))$, $((\beta_1, \delta_1)(\beta_2, \delta_2))$, welche durch einen Punkt Z laufen. Dann läuft auch die Gerade $((\gamma_1, \delta_1)(\gamma_2, \delta_2))$ durch diesen Punkt Z. Beweis: Mehrmalige Anwendung des Satzes von Desargues.

§ 6.

Eigenschaften der harmonischen Punkte.

Def. 1: D heißt der vierte harmonische Punkt zu dem geradlinigen Punktetripel $(A, B; C)$, wenn man ein ebenes Viereck[1]) H, E, F, G hat, so daß $F \neq C$, $G \neq C$, $\mathfrak{G}(C, F, G)$, $H = ((A, G)(B, F))$, $E = ((A, F)(B, G))$, $D = ((A, B)(H, E))$.

(A, B, C, D) sind harmonisch bedeutet: D ist der 4. harmonische Punkt zu $(A, B; C)$.

Satz 1: D ist unabhängig von den Punkten F und G. (E, H sind durch F, G bestimmt.) Beweis: Man habe zwei Vierecke (E_1, F_1, G_1, H_1) und (E_2, F_2, G_2, H_2). 1. Fall: Sei $\mathfrak{G}(F_1, F_2, G_1, G_2)$. Nach Desargues laufen (E_1, E_2) und (H_1, H_2) durch $((F_1, F_2)(G_1, G_2))$. Also liegen $A = ((E_1, F_1)(E_2, F_2))$, $B = ((F_1, H_1)(F_2, H_2))$, $((E_1, H_1)(E_2, H_2))$ auf einer Geraden. 2. Fall: $\mathfrak{G}(F_1, F_2, G_1, G_2)$. Beweis durch zweimalige Anwendung des Beweises von Fall 1.

Satz 2: Wenn (A, B, C, D) harmonisch sind, so sind auch (A, B, D, C) und (B, A, C, D) harmonisch.

Satz 3: Wenn (A, B, C, D) harmonisch sind, so sind auch (C, D, A, B) harmonisch. Beweis: Sei E, F, G, H das Viereck wie

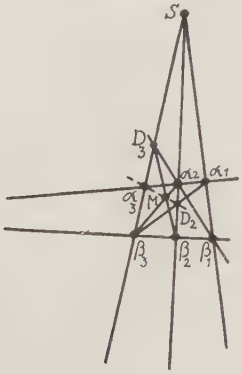

Fig. 10.

bei Def. 1; $((D, E)(C, G)) = J$. Aus dem Satz von Desargues, angewandt auf die Dreiecke (E, G, A) und (C, D, J), folgt, daß (E, C), (G, D), (A, J) durch einen Punkt laufen.

[1]) Da ideale Ebenen noch nicht definiert sind, muß man annehmen, daß das Viereck in einer realen Ebene liegt. Diese Einschränkung ist hier unwesentlich.

Satz 4: Man habe auf einer Geraden die Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, auf einer anderen die Punkte $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, so daß (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3), (α_4, β_4) durch einen Punkt S laufen. $(\alpha_1, \alpha_4, \alpha_2, \alpha_3)$ seien harmonisch. Dann sind auch $(\beta_1, \beta_4, \beta_2, \beta_3)$ harmonisch. Beweis: Sei $D_2 = ((\alpha_1, \beta_3)(\alpha_2, \beta_2))$, $D_3 = ((\alpha_2, \beta_1)(\alpha_3, \beta_3))$, $M = ((\alpha_2, \beta_3)(D_3, \beta_2))$. Dann hat man die Dreiecke (D_3, S, β_2) und $(\alpha_2, \alpha_1, \beta_3)$ mit $((D_3, \alpha_2)(S, \alpha_1)(\beta_2, \beta_3)) = \beta_1$. Also nach Desargues ist $\mathfrak{G}(D_2, M, \alpha_3)$. Weiter ist: $\alpha_4 = ((S, M)(\alpha_1, \alpha_2))$, $\beta_4 = ((S, M)(\beta_1, \beta_2))$. Nämlich man hat die Vierseits: $(S, D_3, \beta_3, M, \alpha_2, \beta_2)$ und $(S, \alpha_2, D_2, M, \alpha_3, \beta_3)$.

Satz 5: Wenn (A, B, C, D) harmonisch sind, so hat man $AB \int CD$. Beweis: Wenn 3 Punkte real sind, folgt der Satz durch mehrfache Anwendung des Axioms von Pasch. Allgemein folgt er dann aus Satz 4 und Satz 7 von § 5.

Def. 2: Man habe auf einer Geraden a die Punktmenge (A), auf einer Geraden b die Punktmenge (B), ferner außerhalb a, b einen Punkt C. (A) und (B) seien so aufeinander abgebildet, daß $\mathfrak{G}(A, B, C)$ ist, wenn B das Bild aus (B) von A aus (A) ist. Dann gelte: $(A) \overline{\overline{\wedge}}_C (B)$.

Man habe nun auf einer Geraden g die harmonischen Punkte (A, B, C, D). Dabei seien A, B, C real und $[A, C, B]$. E, F, G, H

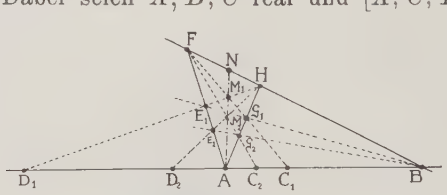

Fig. 11.

seien Punkte wie in Def. 1, man hat also die Geraden: (A, E, F), (A, G, H), (B, H, F), (B, G, E), (F, G, C), (D, E, H). Ferner seien H, F real und $[B, H, F]$. Dann sind auch E, G real. Man hat, wenn A, B, H, F fest sind, C, D, E, G veränderlich, $C \overline{\overline{\wedge}} G \overline{\overline{\wedge}} E \overline{\overline{\wedge}} D$ (vgl. Fig. 11). Hat man zwei Punkte C_1, C_2 und man konstruiert entsprechend G_1, G_2, E_1, E_2 (bei festen H, F) und bezeichnet $M_\nu = ((F, C_\nu)(H, E_\nu))$, so hat man die beiden Dreiecke (E_ν, M_ν, G_ν), also nach Desargues laufen (E_1, E_2), (G_1, G_2), (M_1, M_2) durch A. Damit hat man:

Satz 6: Wenn (A, B, C, D) harmonische Punkte sind und A, B sind fest, so kann die Verwandtschaft zwischen C und D aus zwei Perspektiven zusammengesetzt werden, so daß $C \overline{\overline{\wedge}} M \overline{\overline{\wedge}} D$, wobei die Verbindung der Perspektivitäts-Zentren durch B, die Laufgerade von M durch A läuft.

Bezeichnet man: $((A, M)(H, F)) \cdot N$, so sind (H, F, B, N) harmonisch; also, wenn B, H, F fest sind und A variiert, so ist N fest. Hat man also auf der Geraden g die Punkte A^1 und A^2, und macht man (A^1, B, C^1, D) und (A^2, B, C^2, D) harmonisch, so kann man konstruieren: $M^1 = ((A^1, N)(C^1, F))$, $M^2 = ((A^2, N)(M^1, H))$, $C^2 = ((A^1, B)(F, M^2))$, $D = ((A^1, B)(H, M^1))$. Man hat also: $C^2 \overline{\wedge} M^2 \overline{\wedge} M^1 \overline{\wedge} C^1$. Bezeichnet man: $((H, C^1)(F, C^2)) = V$, so liegt für variable C^1 der Punkt V auf einer Geraden durch B. Nämlich ist $C_0{}^1 = A^2$, $C_1{}^1 \neq C_0{}^1$, und zeich-

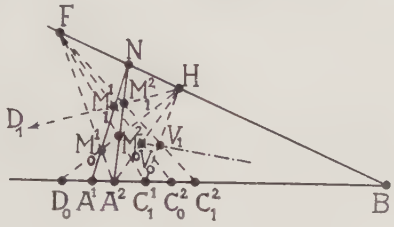

Fig. 12.

net man entsprechend: $M_0{}^1$, $M_0{}^2$, $C_0{}^2$ und $M_1{}^1$, $M_1{}^2$, $C_1{}^2$, so hat man die beiden Vierseits:

$$(M_0{}^1, M_1{}^1, M_0{}^2, M_1{}^2, \mathrm{H}, \mathrm{N}),$$
$$\big(A^2, C_1{}^1, V_0, V_1, H, ((C_1{}^1, A^2)(V_0, V_1))\big).$$

Die ersten 5 Ecken sind paarweise perspektiv von F aus, also auch die beiden sechsten Ecken, also man hat die Gerade:

$$\big(F, N, ((A^2, C_1{}^1)(V_0, V_1))\big),$$

also man hat die Gerade (V_0, V_1, B). Dann ist: $C^2 \overline{\wedge} V \overline{\wedge} C^1$. Man hat also:

Satz 7: Wenn (A^1, B, C^1, D) und (A^2, B, C^2, D) je 4 harmonische Punkte sind und A^1, A^2, B sind fest, so kann die Verwandtschaft zwischen C^1 und C^2 aus zwei Perspektiven zusammengesetzt werden, so daß $C^2 \overline{\wedge} V \overline{\wedge} C^1$, wobei die Verbindung der Perspektivitäts-Zentren durch B läuft, die Laufgerade von V ebenfalls durch B.

Nach Voraussetzung hatte man die Geraden: (A, B, C, D), (A, E, F), (A, G, H), (B, H, F), (B, G, E), (F, G, C), (D, E, H). Seien nun B, D, H, E fest, F, G, C, A veränderlich (vgl. Fig. 13). Hat man dann zwei Punkte A^1 und A^2 und konstruiert entsprechend F^1, G^1, C^1 und F^2, G^2, C^2, so hat man die Dreiecke (A^1, F^1, G^1) und (A^2, F^2, G^2), welche von B aus perspektiv sind. Man hat also nach Desargues die Gerade $\big(H, E, ((F^1, C^1)(F^2, C^2))\big)$, also

$$((F^1, C^1)(H, D)) = ((F^2, C^2)(H, D)) = \mathrm{M}$$

ist unabhängig von A, und man hat: $C \overline{\wedge}_M G \overline{\wedge}_H A$. Es sei weiter vorausgesetzt, daß B, D real sind, und $[B, A, D]$, $[D, E, H]$. Daraus folgt: $[B, C, D]$, $[B, F, H]$, $[B, G, E]$, $[H, M, E]$. Hat man weiter: $[B, A^2, A^1, D]$, so folgt: $[E, G^1, G^2]$, $[C^2, C^1, D]$. Also hat man:

Satz 8: Wenn (A, B, C, D) harmonische Punkte sind, und B, D sind fest, so kann die Verwandtschaft zwischen A und C aus zwei Perspektiven zusammengesetzt werden, so daß $C \overline{\wedge} G \overline{\wedge} A$, wobei die Verbindung der Perspektivitätszentren durch D geht, die Laufgerade von G durch B. Ferner ändert sich C monoton mit A, wenn B, D real sind und A in $\langle B, D \rangle$ ist.

Wenn α und γ Punkte auf $\langle B, D \rangle$ sind, so daß $[B, \alpha, \gamma, D]$, so sei jetzt geschrieben: $\alpha < \gamma$. Man hat also: $C < A$ (vgl. Fig. 1). Dann gilt:

Axiom: Hat man außerhalb der Geraden (B, D) den Punkt E und auf (D, E) die Punkte M, H in der Anordnung $[D, E, M, H]$,

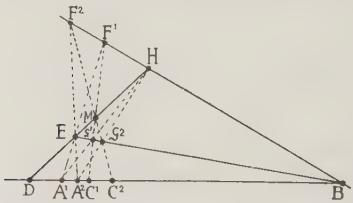

Fig. 13.

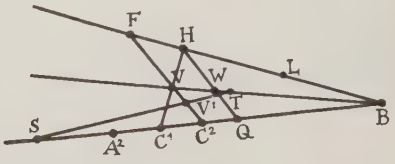

Fig. 14.

auf (B, D) den Punkt Q, sowie die Punktmenge (A), und projiziert man (A) von H aus auf (B, E) nach (G), (G) von M aus wieder auf (B, D) nach C, und ist $[B, Q, (A), D]$, so gibt es ein C aus (C), welches kleiner ist als alle A aus (A). Dabei bedeutet $\alpha < \gamma$, daß $[B, \alpha, \gamma, D]$ (vgl. Fig. 1).

Daraus folgt:

Satz 9: Hat man im Intervall $\langle B, D \rangle$ den Punkt Q und die Punktmenge (A), so daß $[B, Q, (A), D]$, ferner die Punktmenge (C), welche so auf (A) abgebildet ist, daß (A, B, C, D) harmonisch sind, wenn C das Bild aus (C) von A aus (A) ist, so gibt es ein C, welches kleiner ist als alle A.

Ferner folgt:

Satz 10: Hat man auf einer Geraden g die Punkte Q, B, D und die Punktmenge (A), so daß $[(A), Q, B, D]$, ferner die Punktmenge (C), welche so auf (A) abgebildet ist, daß (A, B, C, D) harmonisch sind, wenn C das Bild aus (C) von A aus (A) ist, so gibt es ein C, welches größer ist als alle A, wenn $C > A = [A, C, B]$ bedeutet.

Man kann nämlich die realen Punkte O, B', D' so bestimmen, daß $[O, D, D']$ und $[B, O, B']$. Setzt man dann $g' = (B', D')$, $A' = (g'(A, O))$, $C' = (g'(C, O))$, $Q' = (g'(Q, O))$, so hat man den Satz auf Satz 9 zurückgeführt.

Man habe nun wieder wie in Satz 7 die harmonischen Punkte (A^1, B, C^1, D) und (A^2, B, C^2, D). D, B seien real, D sei veränderlich, aber so daß $[D, A^1, A^2 B]$. Daraus folgt nach Satz 8: $[D, C^1, C^2, B]$. Für die Punkte F, H gilt $[B, H, F]$. V sei derselbe Punkt wie in Satz 7. Aus $[B, C^2, C^1]$ und $[B, H, F,]$ folgt $[H, V, C^1]$.

Für $[A^2, \gamma, \delta, B]$ sei geschrieben $\gamma < \delta$. Man hat also $C^1 < C^2$. Dann gilt:

Satz 11: Hat man auf einer Geraden g die Punkte A^2, Q, B in der Anordnung $[A^2, Q, B]$, ferner die Punktmenge (C^1), so daß $[A^2, (C^1), Q, B]$, und außerhalb g den Punkt F, im Intervall $\langle F, B\rangle$ den Punkt H, im Intervall $\langle H, Q\rangle$ den Punkt W, und projiziert man (C^1) von H aus auf (B, W) nach (V), (V) von F aus wieder auf g nach (C^2), so gibt es ein C^1 aus (C^1), welches kleiner ist als alle C^2 aus (C^2). [vgl. Fig. 14.] Dabei bedeutet $\gamma < \delta$, daß $[A^2, \gamma, \delta, B]$. Beweis: Zeichne T auf $\langle W, B\rangle$ und S vor $[A^2, B]$ und setze

$$((F, C^2)(S, T)) = V';$$
$$((S, T)(H, B)) = L; \quad ((H, V')(A^2, B)) = C'.$$

Dann ist: $[H, L, B]$, $[S, C^2, B]$, $[V, T, B]$, $[V, V', C^2]$, $C^1 < C'$. Nach dem Axiom gibt es ein C', so daß $C' < (C^2)$, also gibt es ein $C^1 < (C^2)$.

Satz 12: Hat man auf einer Geraden g die drei Punkte A^1, A^2, B in der Anordnung $[A^1, A^2, B]$ und die Punktmenge (D), so daß $[D, A^1, A^2, B]$ für alle D, ferner die Punktmengen (C^1) und (C^2), welche so auf (D) abgebildet sind, daß (A^1, B, C^1, D) und (A^2, B, C^2, D) harmonisch sind, wenn C^1, C^2 die Bilder aus resp. (C^1), (C^2) von D aus (D) sind, so gibt es ein C^1, welches kleiner als alle C^2 ist.

§ 7.
Die projektive Verwandtschaft.

Def.: Die Punkte zweier Geraden sind aufeinander projektiv abgebildet, wenn die Abbildung folgende drei Eigenschaften hat:

1. Sie ist umkehrbar eindeutig.
2. Harmonischen Punkten entsprechen harmonische Punkte.
3. Zwei sich trennenden Punktepaaren entsprechen zwei sich trennende Punktepaare.

Das gleiche gilt, wenn eine Gerade projektiv auf sich selbst abgebildet ist.

Satz 1: Sind zwei Geraden projektiv auf eine dritte abgebildet, so sind sie dadurch projektiv abgebildet.

Satz 2: Sind zwei Geraden aufeinander perspektiv abgebildet, so sind sie aufeinander projektiv abgebildet.

Satz 3 (Fundamentalsatz): Ist eine Gerade projektiv auf sich selbst abgebildet, so daß drei Punkte fest sind, so sind alle Punkte der Geraden fest. Beweis: A, B, C seien die festen Punkte.

Seien zunächst C, A, B real und $[A, B, C]$. Es genügt zu zeigen, daß das Intervall $[A, B]$ fest ist, denn man kann das ganze Äußere des Intervalles harmonisch nach innen werfen. Sei also entgegen der Behauptung der Punkt P in $\langle A, B\rangle$ nicht fest, und P' das Bild von P. Dann liegt P' in $\langle A, B\rangle$, weil $P'CfAB$ wegen $PCfAB$. Man kann annehmen, daß P' in $\langle P, B\rangle$ liegt, denn sonst betrachte man die inverse Abbildung. Das Intervall $\langle P, P'\rangle$ enthält keinen Fixpunkt, denn das Bild jedes Punktes aus $\langle P, P'\rangle$ liegt in $\langle P', B\rangle$, weil es mit C zusammen das Paar (P', B) trennt, weil ein Punkt aus $\langle P', P\rangle$ in $\langle P, B\rangle$ liegt.

Sei nun y ein Fixpunkt aus $[P, B]$ und (y) die Menge dieser Fixpunkte. Ebenso sei x ein Fixpunkt aus $[A, P]$ und (x) die Menge dieser Fixpunkte. Also (x) und (y) haben zwischen sich das Intervall $\langle P, P'\rangle$. Bedeute nun allgemein: $\xi_1 < \xi_2$ daß: $[A, \xi_1, \xi_2, B]$. Der Punkt $z = z(x, y)$ sei nun so bestimmt, daß (x, y, C, z) harmonisch sind. Man hat also $[x, z, y]$, und z ist auch ein Fixpunkt. Wenn x fest ist, und y alle Punkte aus (y) durchläuft, so muß nach Satz 9 von § 6 der Punkt $z(x, y)$ einen Punkt aus (x) annehmen. Und

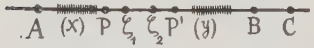

Fig. 15.

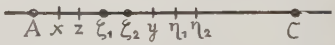

Fig. 16.

wenn y fest ist, und x alle Punkte aus (x) durchläuft, so muß nach Satz 10 von § 6 der Punkt $z(x, y)$ einen Punkt aus (y) annehmen. Seien nun ζ_1 und ζ_2 zwei Punkte, so daß: $(x) < \zeta_1 < \zeta_2 < (y)$. Also z. B. ζ_1 und ζ_2 in $\langle P, P'\rangle$. Und die Punkte η_1, η_2 seien so bestimmt, daß (x, η_1, C, ζ_1) und (x, η_2, C, ζ_2) harmonisch sind. Also sind η_1 und η_2 Funktionen von x. Wegen $\zeta_1 < \zeta_2$ gibt es nach Satz 12 von § 6 ein η_1, welches kleiner ist als alle η_2. Zu diesem η_1 gibt es ein y, welches kleiner ist als dieses η_1; nämlich zu jedem η_1 gibt es ein solches y; denn wenn η_1 und $z(x, y)$ vom gleichen (fest gedachten) x abhängen, so liegt ein $z(x, y)$ bei veränderlichem y in (x), wie oben bewiesen; ein y, bei welchem z in (x) liegt, ist kleiner als η_1, weil dann $z < \zeta_1$ und (x, y, C, z) und (x, η_1, C, ζ_1)

harmonisch sind, und die Punkte aus $((y) + \eta_1)$ ändern sich in $\langle x, C\rangle$ monoton mit den Punkten aus $((z) + \zeta_1)$ (§ 6 Satz 8).

Es gibt also ein η_1, welches kleiner ist als alle η_2, und ein y, welches kleiner ist als dies η_1. Also gibt es ein y, welches kleiner ist als alle η_2. Dies y sei y_0. Man kann dann, wie oben bewiesen, ein x_0 in (x) und ein z_0 in (y) finden, so daß (x_0, y_0, C, z_0) harmonisch sind. Bildet man $y(z_0, x)$, so daß (x, y, C, z_0) harmonisch sind, so gibt es bei veränderlichem x unter diesen $y(z_0, x)$ ein y, welches kleiner ist als alle η_2, nämlich y_0. Wegen $\zeta_2 < z_0$ gibt es

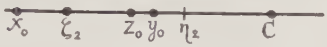

Fig. 17.

nach Satz 12 von § 6 ein η_2, welches kleiner ist als alle $y(z_0, x)$. Also es gibt: Ein $y(z_0, x)$ kleiner als alle η_2. Und: ein η_2 kleiner als alle $y(z_0, x)$. Das ist ein Widerspruch, der nur zu beseitigen ist, wenn $P' = P$ ist. Damit ist die Behauptung im ersten Fall bewiesen.

Im allgemeinen Fall, wenn A, B, C beliebig real oder ideal sind, verbinde man einen realen Punkt O mit A, B, C und schneide dies Büschel in drei realen Punkten. Dann folgt alles aus den Sätzen 1, 2.

§ 8.

Die ideale Ebene und der Raum.

Wir haben bisher von idealen Ebenen und von Räumen keinen Gebrauch gemacht. Es soll aber noch gezeigt werden, daß das Axiomensystem erlaubt, dieselben zu definieren.

Satz 1: Hat man 3 (reale oder ideale) Punkte A, B, C, so daß $\mathfrak{G}(A, B, C)$, so kann man in jeder Ebene durch A, B, C die realen Geraden a, b, c durch resp. A, B, C so legen, daß die Punkte (a, b), (a, c), (b, c) real und voneinander verschieden sind. Beweis: Man zeichne durch den realen Punkt Q die drei Geraden a, b, c', nach resp. A, B, C, bestimme A' auf a, C' auf c', so daß $\langle A', C'\rangle$ von b in B' getroffen wird, und ziehe durch den Punkt C'' auf $\langle B', C'\rangle$ die Gerade c nach C. Diese trifft a, b, oder C liegt auf $\langle Q, C'\rangle$.

Def. 1: Vier Punkte A, B, C, D liegen in einer Ebene, wenn entweder zwei der Punkte zusammenfallen, oder die Geraden (A, B), (C, D) sich treffen.

Satz 2: Dann wird auch (A, C) von (B, D) getroffen (Fig. 18). Beweis: Wenn 3 von den 4 Punkten auf einer Geraden liegen, ist alles klar. Andernfalls setze man $((A, B)(C, D)) = E$, zeichne die realen Punkte s, r, s', r' so, daß $\overline{\mathfrak{E}}(s, s', A, B)$, $\mathfrak{E}(s, s', B, D)$, $\overline{\mathfrak{E}}(s, s', A, C)$, $\mathfrak{G}(A, s, r)$,

$\mathfrak{G}(A, s', r')$, $\mathfrak{E}(E, C, r, r')$ und setze: $p = ((B, s)(E, r))$, $q = ((p, D)(C, r))$, $p' = ((B, s')(E, r'))$, $q' = ((D, p')(C, r'))$. Diese Schnittpunkte existieren nach Satz 7 von § 4. Nach Satz 1 kann man p, r, s, p', r', s' real bestimmen. Man hat weiter den Punkt $T = ((p, p')(r, r'))$. Durch T laufen auch (s, s') und (q, q'). Nämlich (s, s') und (q, q') treffen (p, p') und (r, r'), liegen aber nicht in der Ebene (p, p', r, r'). Die beiden Ebenen (s, T, q) und (s', T, q') haben die beiden Geraden (s, s') und (q, q') gemeinsam, fallen also zusammen. Also man hat den Schnittpunkt $F = ((s, q)(s', q'))$. Dann trifft (A, C) (s, q) und (s', q'), liegt aber nicht in der Ebene (s, q, s', q'), läuft also durch F. Ebenso läuft auch (B, D) durch F.

Satz 3: Wenn $\overline{\mathfrak{G}}(A, B, C)$, $\mathfrak{E}(A, B, C, D)$, $\mathfrak{E}(A, B, C, E)$, so ist $\mathfrak{E}(A, B, D, E)$. Beweis: Wegen $\mathfrak{E}(A, B, C, D)$ hat man den Punkt $F = ((A, D)(B, C))$, und wegen $\mathfrak{E}(A, B, C, E)$ den Punkt $G = ((A, C)(B, E))$. F liegt nicht auf (A, C) und G nicht auf (B, C), wegen $\overline{\mathfrak{G}}(A, B, C)$.

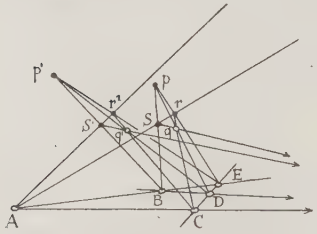

Fig. 18.

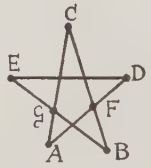

Fig. 19.

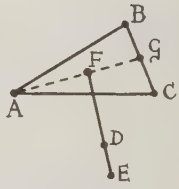

Fig. 20.

Und man hat $\mathfrak{E}(A, B, G, F)$ wegen $C = ((B, G)(A, F))$, also treffen sich (B, G), (A, F) in H. Also treffen sich (A, D), (B, E).

Def. 2: Die 5 Punkte A, B, C, D, E liegen in einem Raum, wenn 4 von ihnen in einer Ebene liegen, oder wenn die Ebene (A, B, C) von der Geraden (D, E) getroffen wird.

Satz 4: Dann wird auch (A, D, E) von (B, C) getroffen. Beweis: Ist $F = ((A, B, C)(D, E))$, $G = ((A, F)(B, C))$, so liegt G auf (B, C) und in (A, D, E) (Fig. 20).

Daraus folgt: (B, C, E) wird von (A, D) getroffen.

Daraus folgt: Jede Ebene aus drei von den 5 Punkten wird von der Geraden der beiden anderen Punkte getroffen.

Satz 5: $\overline{\mathfrak{E}}(A, B, C, D)$, und seien (A, B, C, D, E) in einem Raum liegend und (A, B, C, D, F) in einem Raum liegend. Dann liegen (A, B, C, E, F) in einem Raum. Beweis: Man hat die Punkte $((A, E)(B, C, D)) = G$ und $((B, F)(A, C, D)) = H$. Man hat dann

(A, B, C, H, G) in einem Raum, denn (A, G) trifft (B, C, H); nämlich $\big(B((C, H)(A, D))\big)$ und $\big(A((C, G)(B, D))\big)$ schneiden sich in K, und

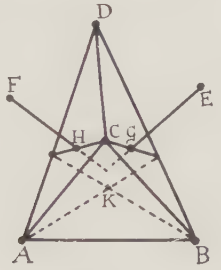

Fig. 21.

(C, K) liegt in (B, C, H) und wird von (A, G) getroffen. Also hat man (A, B, C, E, F) in einem Raum, denn (A, E) trifft (B, C, F).

§ 9.

Anwendung auf die darstellende Geometrie.

In der darstellenden Geometrie hat man räumliche Figuren in einem begrenzten Teil einer Ebene (dem Zeichenblatt) darzustellen. Dies kann man als konvexen Teil einer Ebene des projektiven Raumes ansehen. Wir behandeln im folgenden die Darstellung nach der n-dimensionalen Verallgemeinerung der Zwei-Augen-Methode, unter welche sich die gebräuchlichsten Verfahren subsumieren lassen [1]). In dieser wird ein Punkt des Raumes durch zwei Bildpunkte in der Zeichenebene dargestellt. Durch die Bildpunkte im Zeichenblatt kann man nur einen Teil des Raumes zur Darstellung bringen. Die Bildpunkte der darzustellenden Figuren müssen auch hinreichend weit vom Rande des Zeichenblattes entfernt sein, damit man auf einer Geraden zu beiden Seiten einer Strecke immer noch Punkte finden kann, wenn man solche als Hilfspunkte bei Beweisen braucht.

Wir beweisen zuerst einige Sätze für das Zeichenblatt. Es sei als konvex vorausgesetzt, d. h. wenn A, B zwei Punkte in ihm sind, so liegt die ganze Strecke $[A, B]$ in ihm. Die Punkte der Zeichenebene teilen wir ein in innere und äußere Punkte, je nachdem, ob sie im Inneren oder Äußeren des Zeichenblattes liegen. Das gleiche gilt für die Geraden, je nachdem, ob sie einen inneren Punkt enthalten oder nicht.

---

[1]) Vgl. Müller-Kruppa, Vorl. über darst. Geom. II. Teil 2. Kapitel.

Def. 1: Die Punkte A, B liegen auf derselben Seite einer Geraden g, wenn die Gerade g die Strecke $[A, B]$ nicht trifft.

Satz 1: Ist im Zeichenblatt eine Gerade g gezeichnet, so zerfallen alle Punkte außerhalb g in Klassen, so daß Punkte der gleichen Klasse auf derselben Seite von g liegen (im Sinne der Def. 1). Die Anzahl der Klassen ist genau gleich zwei. Beweise: Axiom von Pasch; Satz 2 von § 2; Existenzaxiom 2 von § 2.

Zwei Gerade a, b teilen das Zeichenblatt in höchstens 4 Teile, nämlich teilt a es in die Teile a_1, a_2, und b teilt es in die Teile b_1, b_2, so kann man die Teile $(a_1 b_1), (a_1 b_2), (a_2 b_1), (a_2 b_2)$ haben.

Satz 2: Wenn die Geraden a, b sich nicht treffen, so teilen sie das Zeichenblatt in genau 3 Teile. Beweis: Man verbinde den Punkt α von a mit dem Punkt β von b. Man kann annehmen, daß $\langle \alpha, \beta \rangle$ im Gebiet $(a_2 b_1)$ liegt. Verlängert man $[\alpha, \beta]$ über α und β, so kommt man in die Gebiete $(a_1 b_1)$ und $(a_2 b_2)$. Man kann also P_{11}, P_{22} auf (α, β) in resp. $(a_1 b_1), (a_2 b_2)$ bestimmen, so daß man die Anordnung $[P_{11}, \alpha, \beta, P_{22}]$ hat. Hat man noch (entgegen der Behauptung) das Gebiet $(a_1 b_2)$, so bestimme man P_{12} in $(a_1 b_2)$. Dann wird $\langle P_{11}, P_{12} \rangle$ von b einmal in β', von a keinmal getroffen. $\langle \beta, \beta' \rangle$ muß dann von a getroffen werden; man hat also den Schnittpunkt (a, b).

Satz 3: Hat man einen inneren Punkt P, durch diesen drei Geraden a, b, c, so kann man eine Gerade d durch P finden, so daß (a, b, c, d) harmonisch sind. Beweis: Man zeichne C auf c und A_1, A_2 so auf a, daß $\langle C, A_1 \rangle$ und $\langle C, A_2 \rangle$ von b in resp. B_1, B_2 getroffen werden. Dann treffen sich $\langle A_1, B_2 \rangle$ und $\langle A_2, B_1 \rangle$ in D, und d geht durch D.

Satz 4: Man habe zwei innere Gerade a, b, die sich nicht treffen, ferner den inneren Punkt P. Dann kann man durch P eine Gerade nach dem unzugänglichen Punkt (a, b) ziehen. Beweis: Man zeichne A_1, A_2 auf a; B_1 auf b; D auf (A_1, B_1), so daß $[A_1, B_1, D]$. Dann wird $\langle D, A_2 \rangle$ von b in B_2 getroffen, und $\langle A_1, B_2 \rangle$, $\langle A_2, B_1 \rangle$ treffen sich in C, und (D, C) trifft a in A_3. Man setze $(P, A_\nu) = a_\nu$, $(\nu = 1, 2, 3)$, und zeichne a_4 durch P, so daß (a_1, a_2, a_3, a_4) harmonisch werden. a_4 läuft dann durch (a, b).

Man kann somit auch entscheiden, ob drei Gerade durch einen (äußeren) Punkt laufen.

Satz 5. Hat man die drei (inneren oder äußeren) Punkte A, B, C, so kann man durch A, B, C die Geraden resp. a, b, c ziehen, so daß die Punkte (a, b), (a, c), (b, c) voneinander verschieden sind und im Inneren des Zeichenblattes liegen. Beweis: Vgl. den Beweis von Satz 1 des § 8.

Satz 6. Hat man die drei (inneren oder äußeren) Punkte A, B, C, so kann man entscheiden, ob A, B, C auf einer Geraden liegen. Beweis: Dieser Satz ist mit Hilfe von Satz 5 und des Satzes von Desargues auf Satz 4 zurückführbar.

In der darstellenden Geometrie entsprechen den geometrischen Dingen und Begriffen des dargestellten Raumteiles Dinge und Begriffe auf dem Zeichenblatt. Wir befolgen hier den umgekehrten Weg: Wir konstruieren einen n-dimensionalen Raum, indem wir seine Elemente durch Definitionen auf dem Zeichenblatt festlegen. Für die so definierten Elemente soll dann das Bestehen der Axiome bewiesen werden, welche in der voranstehenden Arbeit benutzt worden sind.

Einen vorgegebenen n-dimensionalen Raum in der im folgenden dargestellten Weise abzubilden, ist ein weiteres Problem, welches hier nicht in Angriff genommen werden soll.

In der Zeichenebene ist ein fester Punkt O, der „Ordnungspunkt" gegeben. Man kann annehmen, daß er außerhalb des Zeichenblattes liegt. Liegt er innerhalb, so schneide man soviel ab, daß er außerhalb zu liegen kommt. Der abgeschnittene Teil darf dann nur noch zu Hilfskonstruktionen benutzt werden. Jede Gerade durch O heißt „Ordnungsstrahl".

Def. 2: Ein (möglicherweise zusammenfallendes) inneres geordnetes Punkte-(n—1)-tupel $(P^{(1)} \ldots P^{(n-1)})$, welches auf einem Ordnungsstrahl liegt, heißt ein Gegenstandspunkt (kurz: der Punkt P). Es ist $A = B$, wenn $A^{(\nu)} = B^{(\nu)}$ für alle ν, andernfalls $A \neq B$.

Def. 3. $\mathfrak{G}(A, B, C)$ soll bedeuten, daß:

1. Fall: zwei von den drei Punkten A, B, C zusammenfallen, oder

2. Fall: $\mathfrak{G}(A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)})$ und $\overline{\mathfrak{G}}(A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, O)$ für alle $\nu = 1 \ldots (n-1)$, oder

3. Fall: die drei (n—1)-tupel $A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)}$ auf demselben Ordnungsstrahl liegen, und wenn für irgendein ν eine der drei Gleichungen $A^{(\nu)} = B^{(\nu)}$, $A^{(\nu)} = C^{(\nu)}$, $B^{(\nu)} = C^{(\nu)}$ erfüllt ist, auch die beiden anderen erfüllt sind; wenn aber für irgend zwei Zeiger ν, μ: $A^{(\nu)} \neq B^{(\nu)}$, $A^{(\mu)} \neq B^{(\mu)}$, ist $(O, A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)}) \overline{\wedge} (O, A^{(\mu)}, B^{(\mu)}, C^{(\mu)})$. (Man kann leicht feststellen ob dies erfüllt ist.)

Das Prädikat $\mathfrak{G}(\cdots)$ dieser Definition erfüllt alle Relationen des Prädikates $\mathfrak{G}(\cdots)$ von § 1. Das folgt aus den Verknüpfungsaxiomen und dem Fundamentalsatz (Satz 3 von § 7).

Def. 4: Es bedeute $[A, B, C]$, daß A, B, C auf einer Geraden liegen und $[A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)}]$ für irgendein ν.

(Wenn $[A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)}]$, so ist $[A^{(\mu)}, B^{(\mu)}, C^{(\mu)}]$ oder $A^{(\mu)} = B^{(\mu)} = C^{(\mu)}$. Dies folgt aus Satz 2 und Def. 1 von § 7.)

Man kann jetzt für die Gegenstandspunkte die Anordnungsrelationen von § 2 herleiten, mit Ausnahme des Axioms von Pasch.

Def. 5: Die Punkte A, B, C, D liegen in einer Ebene, wenn:

1. Fall: drei von ihnen auf einer Geraden liegen (Def. 3),

2. Fall: für keinen Index ν drei von den vier Punkten $A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)}, D^{(\nu)}$ auf einem gemeinsamen Ordnungsstrahl liegen, und für jedes Indexpaar ν, μ jedes der drei Paare (innerer oder äußerer) Punkte

$$((A^{(\nu)}, B^{(\nu)})(C^{(\nu)}, D^{(\nu)})),\ ((A^{(\mu)}, B^{(\mu)})(C^{(\mu)}, D^{(\mu)}));$$
$$((A^{(\nu)}, C^{(\nu)})(B^{(\nu)}, D^{(\nu)})),\ ((A^{(\mu)}, C^{(\mu)})(B^{(\mu)}, D^{(\mu)}));$$
$$((A^{(\nu)}, D^{(\nu)})(B^{(\nu)}, C^{(\nu)})),\ ((A^{(\mu)}, D^{(\mu)})(B^{(\mu)}, C^{(\mu)})),$$

welches existiert (d. h. die beiden Geraden, die einen Punkt des

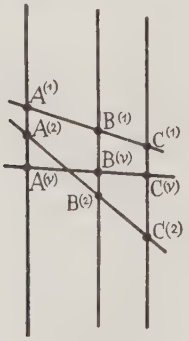

Fig. 22.

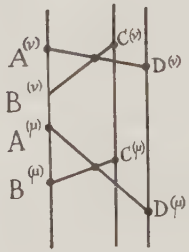

Fig. 23.

Paares bestimmen, fallen nicht zusammen), auf einem Ordnungsstrahl liegt.

(Es genügt, dies nur bei einem Paare festzustellen, bei dem unter den Geraden, die es bestimmen, kein Ordnungsstrahl vorkommt. Für die anderen Paare folgt es aus Satz 9 von § 5 (Vier-Seit-Satz). Man hat sogar immer ein inneres Paar, d. h. beide Punkte sind innere. Dies ist hier aber theoretisch belanglos.)

3. Fall: alle $(n-1)$-Tupel $A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)}, D^{(\nu)}$, auf dem gleichen Ordnungsstrahl so liegen, daß es keinen Index ν gibt, für welchen drei von den Punkten $A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)}, D^{(\nu)}$ zusammenfallen, ohne daß alle vier zusammenfallen, und in der Zeichenebene durch einen Punkt S für jeden Index ν, für welchen $A^{(\nu)} = B^{(\nu)} = C^{(\nu)} = D^{(\nu)}$ nicht gilt, ein Strahl q_ν gezogen werden kann und auf diesem die Punkte $A_\nu^x, B_\nu^x, C_\nu^x, D_\nu^x$ so bestimmt werden können, daß für alle diese ν:

$$O, A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)}, D^{(\nu)} \overline{\wedge}\, S, A_\nu^x, B_\nu^x, C_\nu^x, D_\nu^x$$

und man die Geraden hat:

$$\mathfrak{G}((A_\nu^\varkappa)),\ \mathfrak{G}((B_\nu^\varkappa)),\ \mathfrak{G}((C_\nu^\varkappa)),\ \mathfrak{G}((D_\nu^\varkappa)),$$

wobei ν die Indizes durchläuft, für welche $A^{(\nu)} = B^{(\nu)} = C^{(\nu)} = D^{(\nu)}$ nicht gilt, und daß nicht alle q_ν zusammenfallen[1]) (vgl. Fig. 24).

Es ist noch zu zeigen, daß die Definition 5 im 3. Fall immer entscheidbar ist.

Es sei kein Index vorhanden, für welchen drei der Punkte $A^{(\nu)}$, $B^{(\nu)}$, $C^{(\nu)}$, $D^{(\nu)}$ zusammenfallen, ohne daß alle vier zusammenfallen, denn sonst ist man fertig. Wenn es unter den Indizes, für welche $A^{(\nu)} = B^{(\nu)} = C^{(\nu)}$ falsch ist, kein Paar ν, μ gibt, für welches

$$O, A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)} \overline{\wedge}\ O, A^{(\mu)}, B^{(\mu)}, C^{(\mu)}$$

falsch ist, so hat man $\mathfrak{G}(A, B, C)$, also den 1. Fall. Andernfalls nehme man ein Paar ν, μ, so daß

$$O, A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)} \overline{\wedge}\ O, A^{(\mu)}, B^{(\mu)}, C^{(\mu)}$$

falsch ist. Für dieses Paar ν, μ kann man dann ein Punktepaar A, B oder A, C oder B, C so finden, daß resp.

$$A^{(\mu)} \neq B^{(\mu)} \,\&\, A^{(\nu)} \neq B^{(\nu)}, \text{ oder}$$
$$A^{(\mu)} \neq C^{(\mu)} \,\&\, A^{(\nu)} \neq C^{(\nu)}, \text{ oder}$$
$$B^{(\mu)} \neq C^{(\mu)} \,\&\, B^{(\nu)} \neq C^{(\nu)} \text{ ist.}$$

Nämlich man kann annehmen $A^{(\nu)} \neq B^{(\nu)}$. Ist dann $A^{(\mu)} \neq B^{(\mu)}$, so ist man fertig. Ist aber $A^{(\mu)} = B^{(\mu)}$, so ist $C^{(\nu)} \neq A^{(\nu)}$ oder $C^{(\nu)} \neq B^{(\nu)}$, man kann annehmen $C^{(\nu)} \neq A^{(\nu)}$. Dann ist auch $C^{(\mu)} \neq A^{(\mu)}$, weil sonst $A^{(\mu)} = B^{(\mu)} = C^{(\mu)}$ wäre. Sei also angenommen $A^{(\nu)} \neq B^{(\nu)}$, $A^{(\mu)} \neq B^{(\mu)}$. Man bestimme dann in der Zeichenebene vier Punkte $S, T, A_\mu^\varkappa, B_\nu^\varkappa$ willkürlich, aber so, daß nicht drei von ihnen auf einer Geraden liegen, und setze: $(S, A_\mu^\varkappa) = q_\mu$, $(S, B_\nu^\varkappa) = q_\nu$, $(T, A_\mu^\varkappa) = a^\varkappa$, $(T, B_\nu^\varkappa) = b^\varkappa$, $(a^\varkappa, q_\nu) = A_\nu^\varkappa$, $(b^\varkappa, q_\mu) = B_\mu^\varkappa$. Dann bestimme man $C_\nu^\varkappa$, $C_\mu^\varkappa$ auf resp. q_ν, q_μ, so daß

$$S, A_\nu^\varkappa, B_\nu^\varkappa,\ C_\nu^\varkappa \overline{\wedge}\ O, A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)}$$
$$S, A_\mu^\varkappa, B_\mu^\varkappa,\ C_\mu^\varkappa \overline{\wedge}\ O, A^{(\mu)}, B^{(\mu)}, C^{(\mu)}.$$

Dann ist $\overline{\mathfrak{G}}(T, C_\nu^\varkappa, C_\mu^\varkappa)$, weil ν, μ so bestimmt waren, daß nicht

$$O, A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)} \overline{\wedge}\ O, A^{(\mu)}, B^{(\mu)}, C^{(\mu)}$$

ist. Für jeden weiteren Index λ, für welchen $A^{(\lambda)} = B^{(\lambda)} = C^{(\lambda)} = D^{(\lambda)}$

---

[1]) Wenn $n < 4$, so ist diese Bedingung immer erfüllt, wenn nur die Punkte $A^{(\nu)}$, $B^{(\nu)}$, $C^{(\nu)}$, $D^{(\nu)}$ auf einem gemeinsamen Ordnungsstrahl liegen.

nicht gilt, zeichne man durch T eine Gerade c_λ^{xx}, und zwar $c_\lambda^{xx} = (T, S)$, wenn $A^{(\lambda)} = B^{(\lambda)}$, und wenn $A^{(\lambda)} \neq B^{(\lambda)}$, zeichne man c_λ^{xx} so, daß

$$(T, S),\ a^x,\ b^x,\ c_\lambda^{xx} \barwedge O,\ A^{(\lambda)},\ B^{(\lambda)},\ C^{(\lambda)}$$

und setze:

$$(C_\nu^x,\ C_\mu^x) = c^x,$$
$$(c^x,\ c_\lambda^{xx}) = C_\lambda^x,\ (S,\ C_\lambda^x) = q_\lambda,$$
$$(a^x,\ q_\lambda) = A_\lambda^x,\ (b^x,\ q_\lambda) = B_\lambda^x.$$

Dann bestimme man für alle Indizes, für welche $A^{(\lambda)} = B^{(\lambda)} = C^{(\lambda)} = D^{(\lambda)}$ nicht gilt, D_λ^x auf q_λ, so daß

$$S,\ A_\lambda^x,\ B_\lambda^x,\ C_\lambda^x,\ D_\lambda^x \barwedge O,\ A^{(\lambda)},\ B^{(\lambda)},\ C^{(\lambda)},\ D^{(\lambda)}.$$

Dadurch sind die D_λ^x eindeutig bestimmt. Wenn dann $\mathfrak{G}((D_\lambda^x))$ für alle diese D_λ^x, so ist $\mathfrak{E}(A, B, C, D)$. Wenn aber $\overline{\mathfrak{G}}((D_\lambda^x))$, so kann man auch nicht durch neue Wahl von T, S, A_u^x, B_ν^x erreichen, daß $\mathfrak{G}((D_\lambda^x))$ wird, denn die neue Figur wird ein kollineares Bild der

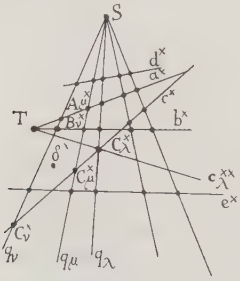

Fig. 24.

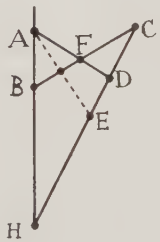

Fig. 25.

alten, wenn von den neuen Punkten T, S, A_u^x, B_ν^x keine drei auf einer Geraden liegen. Nämlich es gibt genau eine kollineare Abbildung der Ebene auf sich selbst, welche vier Punkte S, T, A_u^x, B_ν^x, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, auf vier Punkte S', T', $A_u^{x\prime}$, $B_\nu^{x\prime}$ abbildet, wenn von diesen ebenfalls keine kollinear sind. Wenn man aber drei von den vier Punkten auf einer Geraden wählt, kann man nicht die Figur zeichnen, welche im 3. Fall der Def. 5 verlangt wird.

Für die in Def. 2, 3, 5 definierten Punkte, Geraden, Ebenen gelten alle Relationen von § 1 (Verknüpfungsaxiome). Das ist gezeigt, wenn man die Transitivität des Prädikates $\mathfrak{E}(\ldots)$ bewiesen hat. Sei $\overline{\mathfrak{G}}(A, B, C)$. Es soll gezeigt werden

$$\mathfrak{E}(A, B, C, D)\ \&\ \mathfrak{E}(A, B, C, E) \rightarrow \mathfrak{E}(A, B, D, E).$$

Zuerst sei der folgende Hilfssatz bewiesen: Wenn $\mathfrak{E}(A, B, C, D)$, $C \neq D$, $A \neq B$, $\mathfrak{G}(C, D, E)$, $\mathfrak{G}(O, C^{(\nu)}, D^{(\nu)})$ [kürzer geschrieben: OCD], $OABD$, $OABC$, so ist $\mathfrak{E}(A, B, C, F)$ (Fig. 25). Beweis: Wenn OAB, so folgt der Satz aus dem Vierseit-Satz. Wenn A, B auf demselben Ordnungsstrahl liegen, so setze man:

$$((A, B)(C, D)) = H, \quad ((A, D)(B, C)) = F.$$

Wenn dann für zwei Indizes ν, μ gilt: $A^{(\nu)} \neq B^{(\nu)}$, $A^{(\mu)} \neq B^{(\mu)}$, so ist $C^{(\nu)}$, $D^{(\nu)}$, $E^{(\nu)}$, $H^{(\nu)} \overline{\wedge} C^{(\mu)}$, $D^{(\mu)}$, $E^{(\mu)}$, $H^{(\mu)}$, also

$$B^{(\nu)}, F^{(\nu)}, C^{(\nu)}, ((A^{(\nu)}, E^{(\nu)})(B^{(\nu)}, C^{(\nu)})) \overline{\wedge} B^{(\mu)}, F^{(\mu)}, C^{(\mu)}, ((A^{(\mu)}, E^{(\mu)}), (B^{(\mu)}, C^{(\mu)})).$$

Also liegen $(A^{(\nu)}, E^{(\nu)})(B^{(\nu)}, C^{(\nu)})$, $(A^{(\mu)}, E^{(\mu)})(B^{(\mu)}, C^{(\mu)})$ auf einem Ordnungsstrahl nach dem Fundamentalsatz.

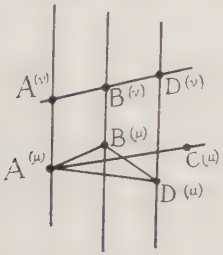

Fig. 26.

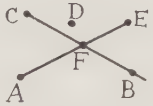

Fig. 27.

Sei nun $\mathfrak{G}(A, B, C)$, $\mathfrak{E}(A, B, C, D)$ $\mathfrak{E}(A, B, C, E)$. Es soll gezeigt werden $\mathfrak{E}(A, B, D, E)$. Man hat zwei Fälle:

1. Fall: Es gibt einen Index ν, so daß $\overline{\mathfrak{G}}(A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)})$.

2. Fall: Alle $A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)}$ liegen auf einem gemeinsamen Ordnungsstrahl.

Im 1. Fall kann man annehmen $\overline{\mathfrak{G}}(A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, D^{(\nu)}) \,\&\, \overline{\mathfrak{G}}(A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, E^{(\nu)})$, denn aus $\mathfrak{G}(A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, D^{(\nu)})$ folgt nach Def. 5: $\mathfrak{G}(A, B, D)$ oder $\overline{O}\,AB$, und aus $\overline{O}\,AB \,\&\, \mathfrak{G}(A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, D^{(\nu)})$ folgt $\mathfrak{G}(A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)})$ (Fig. 26).

Der 1. Fall sei weiter unterteilt in die 4 Unterfälle:

11. Fall: $\overline{O}\,ACD \,\&\, \overline{O}\,ADE \,\&\, \overline{O}\,BDE$.

12. Fall: $\mathfrak{G}(O, A^{(\nu)}, C^{(\nu)}, D^{(\nu)})$.

13. Fall: $\mathfrak{G}(O, A^{(\nu)}, D^{(\nu)}, E^{(\nu)})$.

14. Fall: $\mathfrak{G}(O, B^{(\nu)}, D^{(\nu)}, E^{(\nu)})$.

Im 11. Fall kann man annehmen $\overline{O}\,BC \,\&\, O\,AE$, denn $\overline{O}\,BC \vee \overline{O}\,AC$ und $O\,AE \vee O\,AD$. Man setze: $((A, E)(C, B)) = F$. Dann folgt,

wenn man den eben bewiesenen Hilfssatz auf die Ebene (A, B, C, D) und die Gerade (B, C, F) anwendet: $\mathfrak{E}(A, B, D, F)$. Dann ist $F \neq A$ wegen $\overline{\mathfrak{G}}(A, B, C)$; und $\bar{O} A F$ wegen $\bar{O} A E$; ferner $F \neq B$ wegen $\overline{\mathfrak{G}}(A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, E^{(\nu)})$; und $\bar{O} B D F$ wegen $\bar{O} B C$. Wenn man den Hilfssatz jetzt auf die Ebene (A, B, D, F) und die Gerade (A, F) anwendet, so kommt $\mathfrak{E}(A, B, D, E)$.

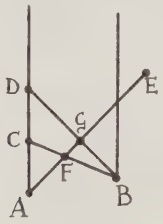

Fig. 28.

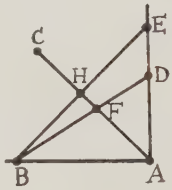

Fig. 29.

12. Fall: $\mathfrak{G}(O, A^{(\nu)}, C^{(\nu)}, D^{(\nu)})$. Man hat dann $\mathfrak{G}(A, C, D)$ nach Def. 5 und $\bar{O} A B C D \,\&\, \bar{O} A C D E$. Wenn dann für zwei Indizes ν, μ gilt: $A^{(\nu)} \neq C^{(\nu)}$, $A^{(\mu)} \neq C^{(\mu)}$, so setze man

$$\left((A^{(\nu)}, E^{(\nu)})\,(B^{(\nu)}, C^{(\nu)})\right) = F^{(\nu)},$$

$$\left((A^{(\mu)}, E^{(\mu)})\,(B^{(\mu)}, C^{(\mu)})\right) = F^{(\mu)}.$$

Man hat $\mathfrak{G}(O, F^{(\nu)}, F^{(\mu)})$ wegen $\mathfrak{E}(A, B, C, E)$. Setzt man: $\left((B^{(\nu)}, D^{(\nu)})\,(A^{(\nu)}, E^{(\nu)})\right) = G^{(\nu)}$, $\left((B^{(\mu)}, D^{(\mu)})\,(A^{(\mu)}, E^{(\mu)})\right) = G^{(\mu)}$, so ist $\mathfrak{G}(O, G^{(\nu)}, G^{(\mu)})$ nach dem Fundamentalsatz, also $\mathfrak{E}(A, B, D, E)$.

13. Fall: $\mathfrak{G}(O, A^{(\nu)}, D^{(\nu)}, E^{(\nu)})$. Man hat dann $\bar{O} A B$, $\bar{O} A C$, und beweist $\mathfrak{G}(A, D, E)$ durch Umkehrung des Beweises des 12. Falles.

Der 14. Fall: $\mathfrak{G}(O, B^{(\nu)}, D^{(\nu)}, E^{(\nu)})$ erledigt sich ebenso wie der 13. Fall, indem man A mit B vertauscht.

Im 2. Fall zeichne man die Fig. 24 vom 3. Fall der Def. 5. Hat man $\overline{\mathfrak{G}}(A, B, C)$, so gibt es einen Punkt S in der Zeichenebene und drei nicht durch einen Punkt laufende Geraden $a^{\varkappa}$, $b^{\varkappa}$, $c^{\varkappa}$, und zu jedem Index ν, für welchen $A^{(\nu)} = B^{(\nu)} = C^{(\nu)}$ nicht gilt, einen Strahl q_ν durch S, so daß $S, (a^{\varkappa}, q_\nu), (b^{\varkappa}, q_\nu), (c^{\varkappa}, q_\nu) \barwedge O, A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)}$ ist. Wenn dann für jeden Index ν, für welchen $A^{(\nu)} = B^{(\nu)} = C^{(\nu)}$ gilt, auch $D^{(\nu)} = E^{(\nu)} = A^{(\nu)}$ gilt, und für jeden Index ν, für welchen $A^{(\nu)} = B^{(\nu)} = C^{(\nu)}$ nicht gilt, alle $D_\nu^{\varkappa}$ auf einer Geraden $d^{\varkappa}$, alle $E_\nu^{\varkappa}$ auf einer Geraden $e^{\varkappa}$ liegen, so sind für A, B, D, E alle Voraussetzungen des 3. Falles der Def. 5 erfüllt, nämlich aus

$$S, A_\lambda^x, B_\lambda^x, C_\lambda^x, D_\lambda^x \overline{\wedge} O, A^{(\lambda)}, B^{(\lambda)}, C^{(\lambda)}, D^{(\lambda)}$$

und $$S, A_\lambda^x, B_\lambda^x, C_\lambda^x, E_\lambda^x \overline{\wedge} O, A^{(\lambda)}, B^{(\lambda)}, C^{(\lambda)}, E^{(\lambda)}$$

folgt $$S, A_\lambda^x, B_\lambda^x, D_\lambda^x, E_\lambda^x \overline{\wedge} O, A^{(\lambda)}, B^{(\lambda)}, D^{(\lambda)}, E^{(\lambda)}$$

nach dem Fundamentalsatz, denn von den Punkten $A^{(\lambda)}, B^{(\lambda)}, C^{(\lambda)}, O$ sind wenigstens drei voneinander verschieden.

Vor der Verifizierung des Axioms von Pasch sei zunächst die Def. 1 von § 5 erweitert.

Def.: Hat man auf einer Geraden drei verschiedene Punkte A, B, C, so gelte immer: $A\,B\,f\,C\,C$ und $A\,A\,f\,B\,C$. Hat man zwei Punkte A, B, so gelte immer $A\,A\,f\,B\,B$. Das Entsprechende gelte in Strahlen- und Ebenen-Büscheln.

Hat man in einer Ebene zwei Geraden a, b und zwei Punkte Y, Z, und ist $C = (a, b)$ und $a\,b\,f\,(C, Y)\,(C, Z)$, so gelte $a\,b\,f\,Y\,Z$.

Dann gilt folgender Satz: Hat man in einer Ebene die beiden Geraden a, b und die drei Punkte X, Y, Z, so gilt:

$$a\,b\,f\,X\,Y \,\&\, a\,b\,f\,X\,Z \rightarrow a\,b\,f\,Y\,Z.$$

Jetzt soll das Axiom von Pasch verifiziert werden. Man habe also drei Punkte A, B, C und $\overline{\mathfrak{G}}(A, B, C)$. In der Ebene (A, B, C) liege eine Gerade d, welche (B, C) zwischen B und C in D trifft (gemäß Def. 4). Dann hat man zwei Fälle:

1. Fall: Es ist $\overline{\mathfrak{G}}(A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)})$ für wenigstens ein ν. Dann ist $[B^{(\nu)}, D^{(\nu)}, C^{(\nu)}]$, und wenn für einen anderen Index μ gilt: $\overline{\mathfrak{G}}(A^{(\mu)}, B^{(\mu)}, C^{(\mu)})$, so ist auch $[B^{(\mu)}, D^{(\mu)}, C^{(\mu)}]$. Wenn $d \neq (B, C)$, so stellen die beiden $(n-1)$-tupel: $((A^{(\nu)}, B^{(\nu)})\, d^{(\nu)})$, $((A^{(\nu)}, C^{(\nu)})\, d^{(\nu)})$ die Punkte resp. $((A, B)\, d)$, $((A, C)\, d)$ dar. Das folgt aus dem Fundamentalsatz oder aus Def. 5 oder aus dem Vierseit-Satz. Nach dem Axiom von Pasch trifft $d^{(\nu)}$ die Strecke $[A^{(\nu)}, B^{(\nu)}]$ oder die Strecke $[A^{(\nu)}, C^{(\nu)}]$. Dann trifft auch $d^{(\mu)}$ die Strecke $[A^{(\mu)}, B^{(\mu)}]$ oder $[A^{(\mu)}, C^{(\mu)}]$.

2. Fall: Alle $(n-1)$-tupel $A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)}$ liegen auf dem gleichen Ordnungsstrahl. Dann kann man drei Geraden a^x, b^x, c^x und einen Punkt S so zeichnen, daß zu jedem Index ν, für welchen $A^{(\nu)} = B^{(\nu)} = C^{(\nu)}$ nicht gilt, ein Strahl q_ν durch S läuft, so daß

$$S, (a^x, q_\nu), (b^x, q_\nu), (c^x, q_\nu) \overline{\wedge} O, A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, C^{(\nu)}.$$

Der Geraden d entspricht dann in dieser Figur (gemäß dem 3. Fall von Def. 5) ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel δ^x. Dies folgt aus dem 2. Fall der Def. 3 und dem Fundamentalsatz. Und es ist $b^x\, c^x\, f\, S\, \delta^x$, weil $B\,C\,f\,O\,D$. Man hat dann

$$a^x c^x f S \delta^x \text{ oder } a^x b^x f S \delta^x,$$

denn aus $$a^x c^x f S \delta^x \& a^x b^x f S \delta^x$$

folgt $b^x c^x f S \delta^x$. Also d trifft $[A, C]$ oder $[A, B]$.

Damit sind alle Axiome verifiziert, mit Ausnahme des Axioms von § 6. Man kann also den Bereich der Gegenstandspunkte und -geraden durch ideale Elemente erweitern.

Es gilt ferner der folgende Satz: Sind A, B, C, D harmonische Punkte und $A^{(\nu)} \neq B^{(\nu)}$, so sind $A^{(\nu)}$, $B^{(\nu)}$, $C^{(\nu)}$, $D^{(\nu)}$ harmonisch. Beweis: Man zeichne durch die Gerade (A, B, C, D) eine Ebene, von welcher nicht alle Bildpunkte auf einen einzigen Ordnungsstrahl fallen. In dieser Ebene zeichne man ein Vierseit über A, B, C, D. Dies wird abgebildet auf $(n-1)$ Vierseits, von denen wenigstens das erste nicht zusammenfällt.

Aus diesem Satze folgt der Satz 9 von § 6. Damit ist dann auch das Axiom von § 6 verifiziert.

Literatur.

Bei der Abfassung dieser Arbeit wurde folgende Literatur benutzt:

1. M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie. 1. Aufl. Leipzig 1882. 2. Aufl. Berlin 1926. Mit einem Anhang von M. Dehn.
2. F. Schur, Grundlagen der Geometrie. Leipzig. 1909.
3. M. Pasch, Die Forderung der Entscheidbarkeit. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 27. 1918.
4. G. Feigl, Über die elementaren Anordnungssätze der Geometrie. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 33. 1925.
5. E. Müller, E. Kruppa, Vorlesungen über darstellende Geometrie. Bd. I. Leipzig u. Wien 1923.
6. E. Müller, Die darstellende Geometrie als eine Versinnlichung der abstrakten projektiven Geometrie. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 14. 1905.

Lebenslauf.

Am 6. April 1900 wurde ich als Sohn des damaligen Stabsarztes Arthur Hesselbach zu Leipzig (Sachsen) geboren. Das Zeugnis der Reife erhielt ich Ostern 1920 auf dem Realgymnasium zu Ahlen (Westf.). Dann studierte ich Mathematik und Naturwissenschaften an den Universitäten Münster, Göttingen, Hamburg, Berlin. Herrn Dr. Prüfer schulde ich großen Dank für viele Ratschläge und Anregungen, die er mir bei der Abfassung der vorliegenden Arbeit gab.